ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΕΡΕΥΝΑΣ
ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ
ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Α΄ ΤΕΥΧΟΣ

2ος ΤΟΜΟΣ

Η συγγραφή και η επιστημονική επιμέλεια του βιβλίου πραγματοποιήθηκε υπό την αιγίδα του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου

**ΑΝΑΔΟΧΟΣ ΕΡΓΟΥ:
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ
ΕΤΑΙΡΕΙΑ**

Ι.Τ.Υ.Ε. «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΡΧΙΚΗΣ ΕΚΔΟΣΗΣ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΟΜΑΔΑ ΣΥΓΓΡΑΦΗΣ

Αργυρόπουλος Ηλίας
Διδάκτωρ Μαθηματικών
Ε.Μ. Πολυτεχνείου
Καθηγητής Β/θμιας Εκπαίδευσης

Βλάμος Παναγιώτης
Διδάκτωρ Μαθηματικών
Ε.Μ. Πολυτεχνείου

Κατσούλης Γεώργιος
Μαθηματικός

Μαρκάτης Στυλιανός
Επίκουρος Καθηγητής Τομέα
Μαθηματικών
Ε.Μ. Πολυτεχνείου

Σίδερης Πολυχρόνης
Μαθηματικός, τ. Σχολικός Σύμβουλος

Ιστορικά Σημειώματα:
Βανδουλάκης Ιωάννης
Διδάκτωρ Πανεπιστημίου Μ. Lomonosov Μόσχας
Ιόνιο Πανεπιστήμιο

Φιλολογική Επιμέλεια:
Δημητρίου Ελένη

Επιλογή εικόνων:
Παπαδοπούλου Μπία

Εικονογράφηση - Σελιδοποίηση:
Αλεξοπούλου Καίτη

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΠΑΝΕΚΔΟΣΗΣ

Η επανέκδοση του παρόντος βιβλίου πραγματοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών & Εκδόσεων «Διόφαντος» μέσω ψηφιακής μακέτας, η οποία δημιουργήθηκε με χρηματοδότηση από το ΕΣΠΑ / ΕΠ «Εκπαίδευση & Διά Βίου Μάθηση» / Πράξη «ΣΤΗΡΙΖΩ».

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Οι διορθώσεις πραγματοποιήθηκαν κατόπιν έγκρισης του Δ.Σ. του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Η αξιολόγηση, η κρίση των προσαρμογών και η επιστημονική επιμέλεια του προσαρμοσμένου βιβλίου πραγματοποιείται από τη Μονάδα Ειδικής Αγωγής του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής.

Η προσαρμογή του βιβλίου για μαθητές με μειωμένη όραση από το ΙΤΥΕ – ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ πραγματοποιείται με βάση τις προδιαγραφές που έχουν αναπτυχθεί από ειδικούς εμπειρογνώμονες για το ΙΕΠ.

ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΓΙΑ ΜΑΘΗΤΕΣ ΜΕ ΜΕΙΩΜΕΝΗ ΟΡΑΣΗ

ΙΤΥΕ - ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

- **Το κοινό κέντρο δυο ή περισσότερων παραλληλογράμμων διχοτομεί τις διαγωνίους των παραλληλογράμμων. Άρα οι φορείς τους είναι συντρέχουσες ευθείες.**
  (Ασκήσεις: § 5.1-5.2 Εμπέδωσης 3 και Σύνθετα 1)

- **Για τις συντρέχουσες ευθείες λαμβάνουμε υπόψιν μας την παρατήρηση της § 5.7.**
  Αν τρεις ευθείες $ε_1$, $ε_2$, $ε_3$ είναι φορείς υψών, διαμέσων ή διχοτόμων τριγώνου συντρέχουν.
  (Ασκήσεις: **§ 5.9 Σύνθετα 8 και § 5.11 Σύνθετα 1)**
  Σχόλιο: Ισοδύναμη έκφραση είναι ΄΄οι ευθείες $ε_1$, $ε_2$ τέμνονται σε σημείο της $ε_3$΄΄.

- **Ένα τρίγωνο είναι ορθογώνιο αν μια διάμεσός του ισούται με το μισό της αντίστοιχης πλευράς.**
  (Ασκήσεις: **§ 5.11 Αποδεικτικές 1, 4)**

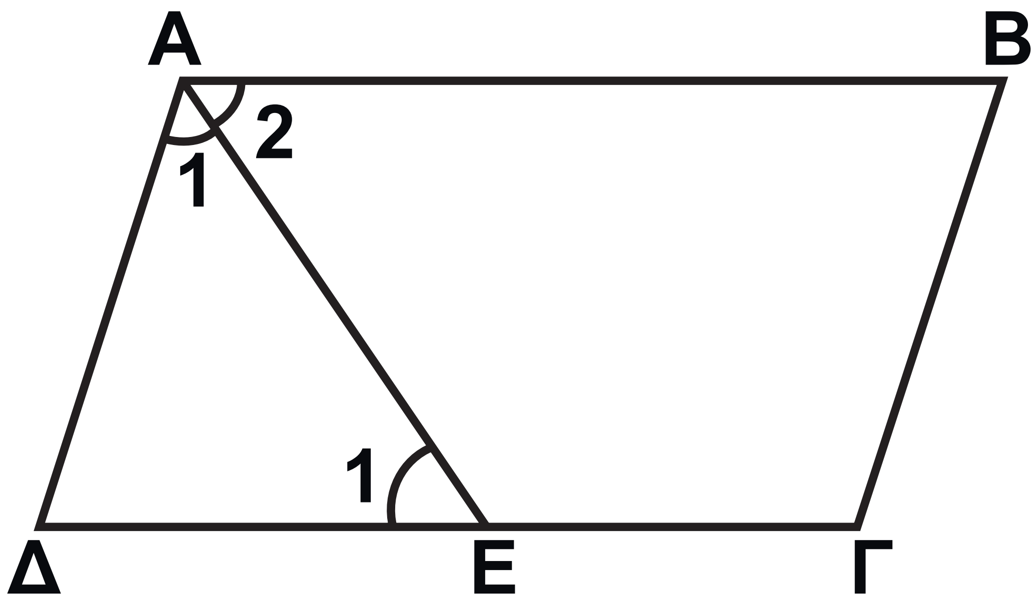
- **Για να αποδείξουμε ότι μια παράσταση Α που εξαρτάται από μεταβλητό σημείο Μ παραμένει σταθερή θεωρούμε μια ή δυο χαρακτηριστικές (ή οριακές) θέσεις του σημείου Μ και βρίσκουμε την τιμή c της παράστασης Α. Αρκεί τότε, για την τυχαία θέση του Μ, να αποδείξουμε ότι Α = c.**
(Ασκήσεις: § 5.3-5.5 Σύνθετα 3)

§ 5.1-5.2

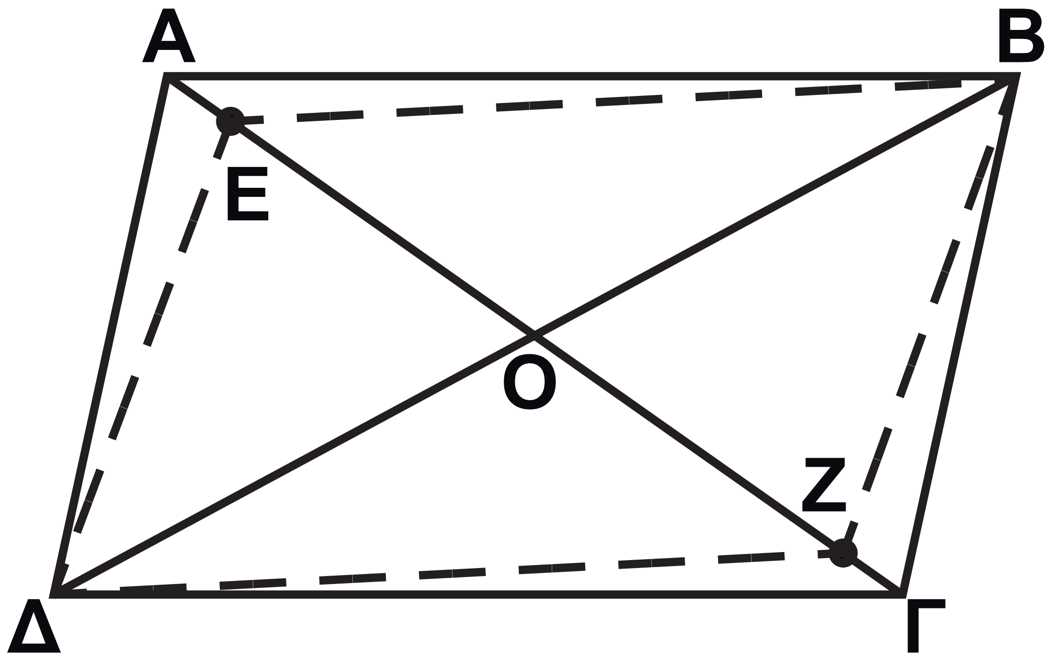
Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Έχουμε: $\left.\begin{aligned}\hat{A}_1 &= \hat{A}_2\\ \hat{A}_2 &= \hat{E}_1\end{aligned}\right\} \hat{A}_1 = \hat{E}_1$, άρα

ΔΕ = ΑΔ = ΒΓ.

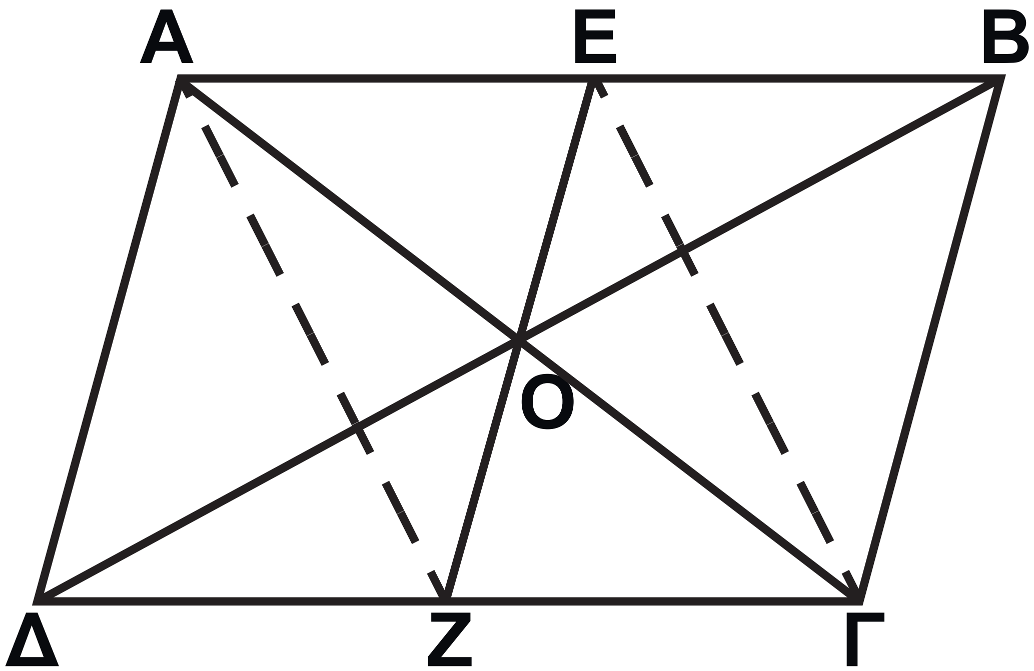


2. Έχουμε: $\left.\begin{array}{l} OE = OZ \\ OB = O\Delta \end{array}\right\}$ **άρα ΒΕΔΖ παραλληλόγραμμο.**



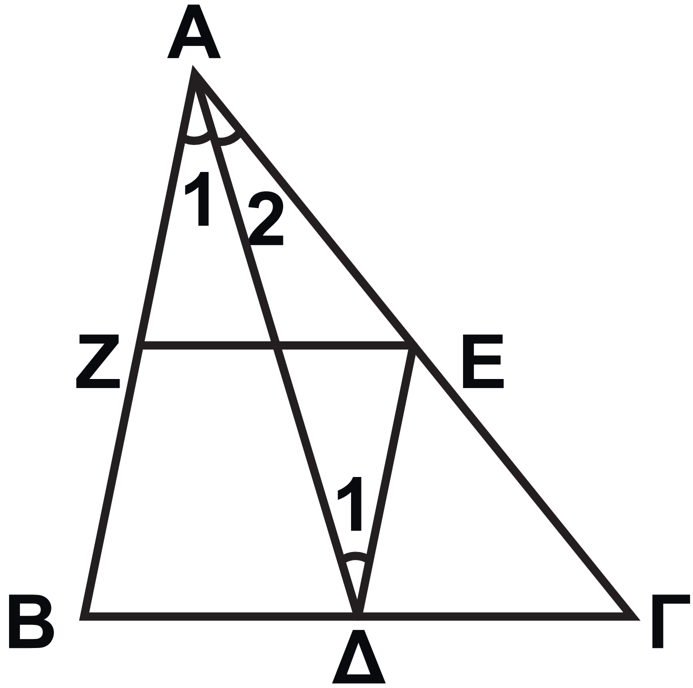
3. i) Έχουμε ΑΕ//=ΓΖ, άρα ΑΕΓΖ παραλληλόγραμμο.

ii) Οι ΑΓ, ΒΔ ως διαγώνιοι του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ διχοτομούνται από το Ο. Οι ΕΖ, ΑΓ είναι διαγώνιοι του ΑΕΓΖ, οπότε η ΕΖ διέρχεται από το μέσο Ο της ΑΓ. Άρα ΑΓ, ΒΔ, ΕΖ συντρέχουν.



4. Έχουμε: $\left.\begin{array}{l}\hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ \hat{A}_1 = \hat{\Delta}_1\end{array}\right\} \hat{A}_2 = \hat{\Delta}_1,$

οπότε ΑΕ = ΔΕ = ΒΖ αφού το ΒΔΕΖ είναι παραλληλόγραμμο.



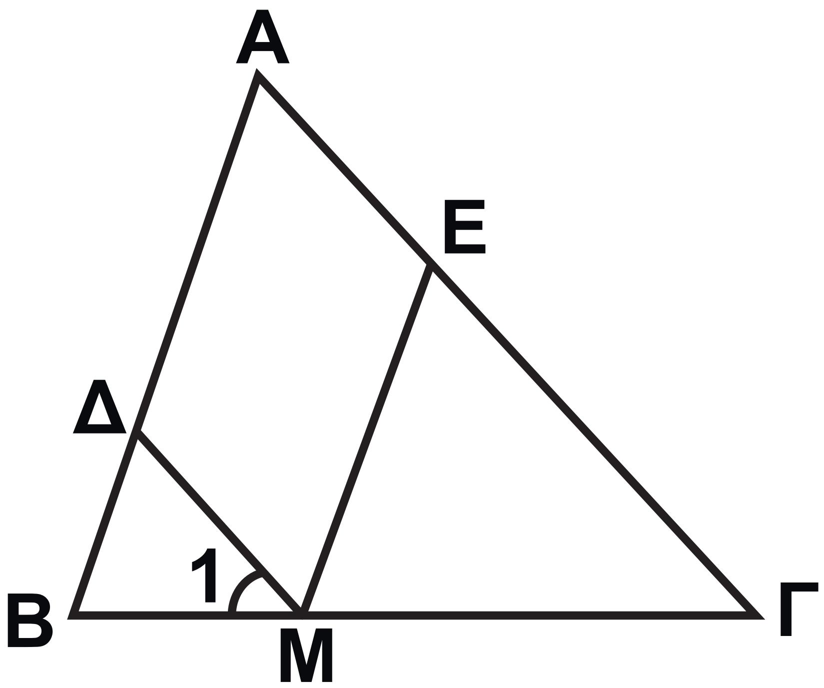
Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Έχουμε: ΜΕ = ΑΔ (1), αφού ΑΔΜΕ παραλληλόγραμμο.

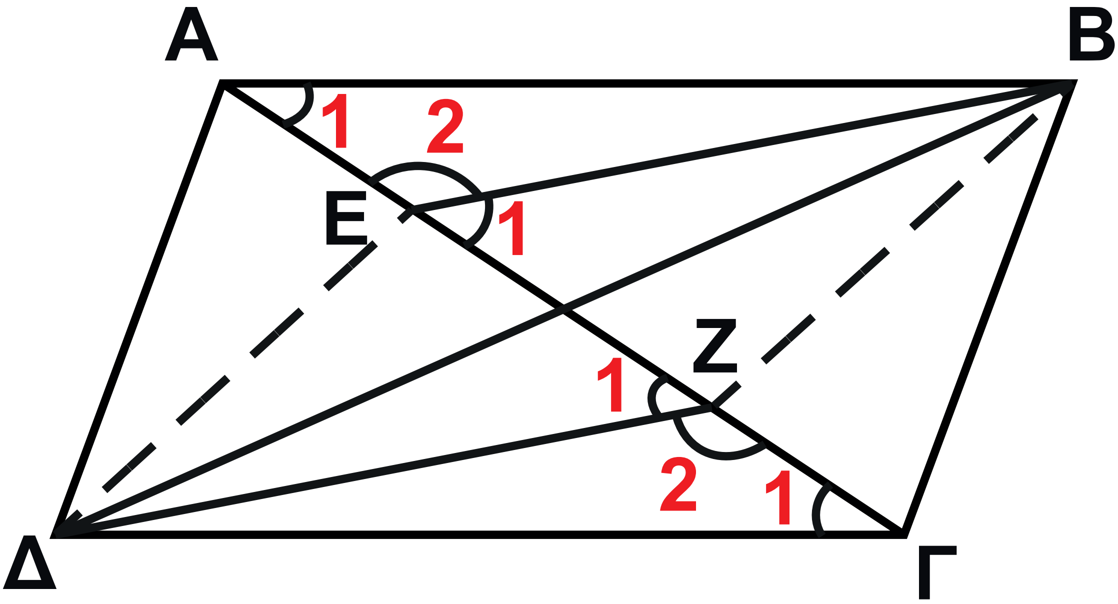
Επίσης: $\left.\begin{array}{l}\hat{B} = \hat{\Gamma} \\ \hat{M}_1 = \hat{\Gamma}\end{array}\right\}$ άρα $\hat{B} = \hat{M}_1$, οπότε ΜΔ = ΔΒ. (2)

Από (1), (2) προκύπτει ότι:

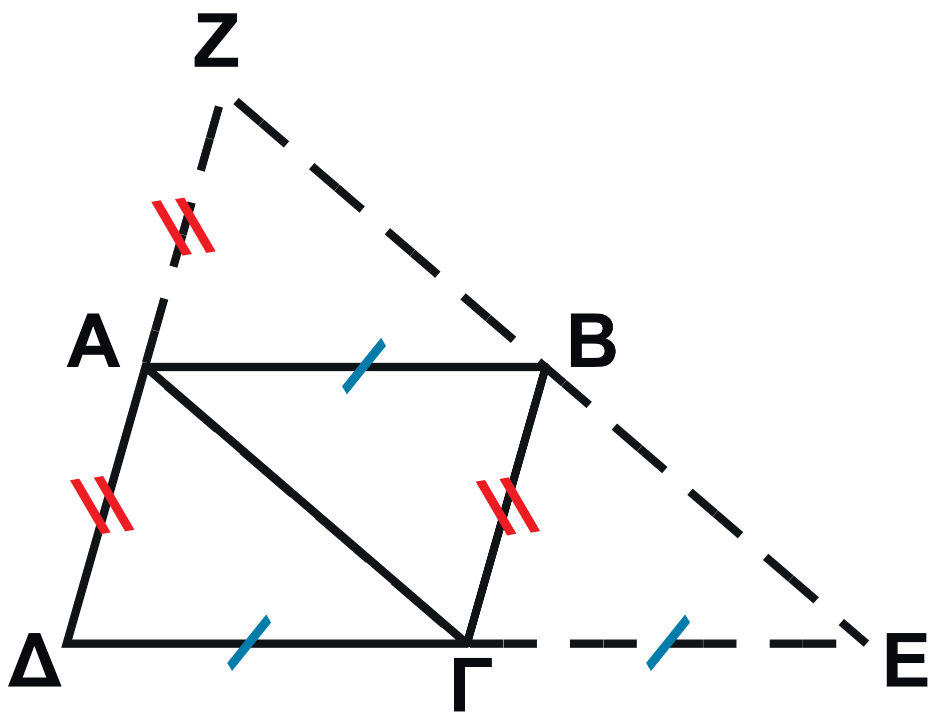
ΜΔ + ΜΕ = ΑΔ + ΔΒ = ΑΒ.



2. Έχουμε: $A\overset{\triangle}{B}E = \Delta\overset{\triangle}{Z}\Gamma$ ($AB = \Delta\Gamma$, $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}_1$, $\hat{E}_2 = \hat{Z}_2$, αφού $\hat{E}_1 = \hat{Z}_1$), άρα $BE = \Delta Z$. Αλλά $BE // \Delta Z$, οπότε ΔEBZ παραλληλόγραμμο. Άρα $\Delta E // BZ$.



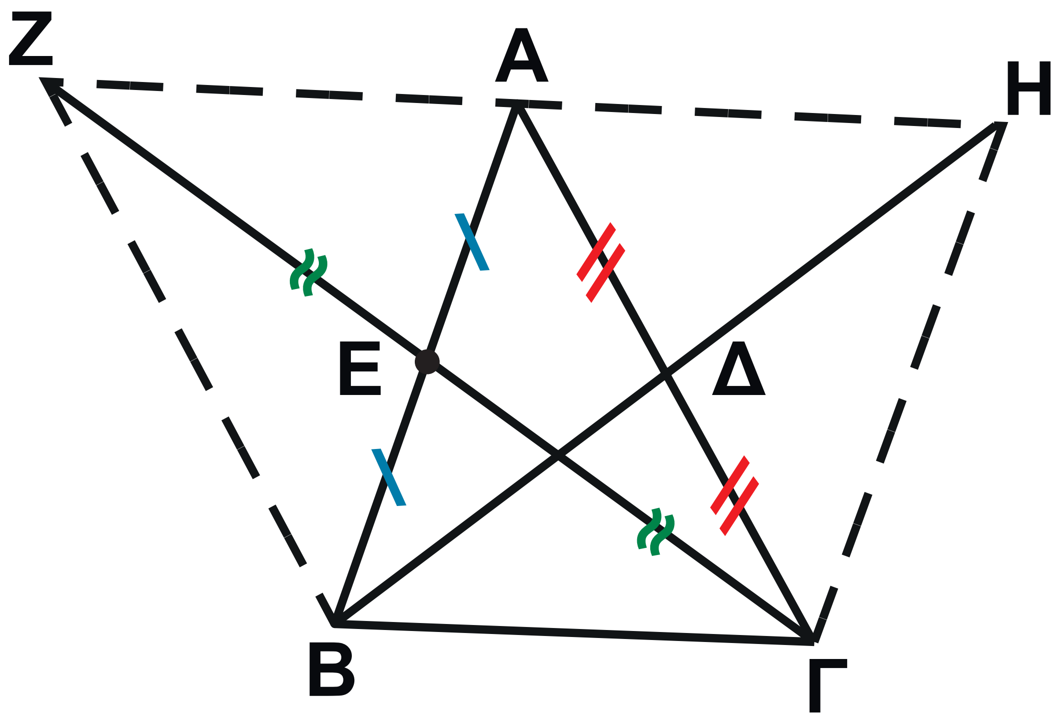
3. Φέρουμε ΑΓ. Τότε το ΑΖΒΓ είναι παραλληλόγραμμο (ΑΖ//=ΒΓ), οπότε ΒΖ//ΑΓ (1).
Επίσης το ΑΒΕΓ είναι παραλληλόγραμμο (ΑΒ//=ΓΕ), οπότε ΒΕ//ΑΓ (2).
Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι Ζ, Β και Ε συνευθειακά (Ευκλείδειο αίτημα).



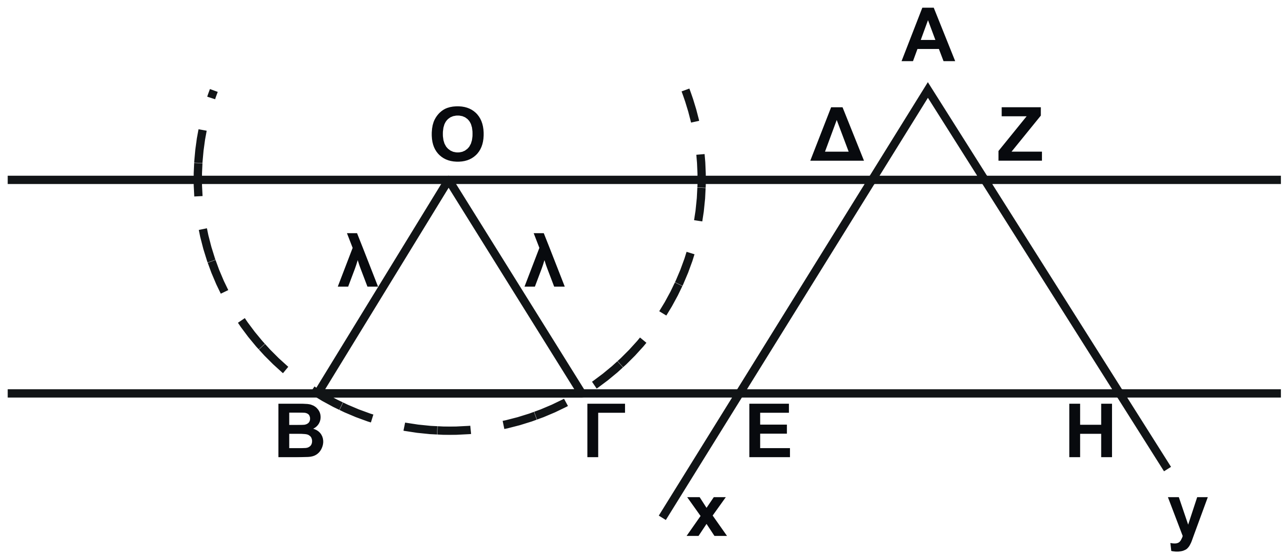
4. Έχουμε ΑΖΒΓ παραλληλόγραμμο (οι διαγώνιοί του διχοτομούνται), οπότε ΑΖ//=ΒΓ (1). Επίσης το ΑΗΓΒ παραλληλόγραμμο (οι διαγώνιοί του διχοτομούνται), οπότε ΑΗ//=ΒΓ (2). Άρα:

i) ΑΗ = ΑΖ = ΒΓ

ii) Ζ, Α, Η συνευθειακά (Ευκλείδειο αίτημα).



5. Με κέντρο τυχαίο σημείο Ο πάνω στη μία από τις παράλληλες, γράφουμε κύκλο με ακτίνα λ, που τέμνει την άλλη παράλληλο στα Β και Γ. Στη συνέχεια από το Α φέρουμε τις παράλληλες προς τις ΟΒ και ΟΓ ευθείες.
Επειδή τα τετράπλευρα ΟΔΕΒ και ΟΖΗΓ είναι παραλληλόγραμμα, είναι ΔΕ = ΟΒ = λ και ΖΗ = ΟΓ = λ.



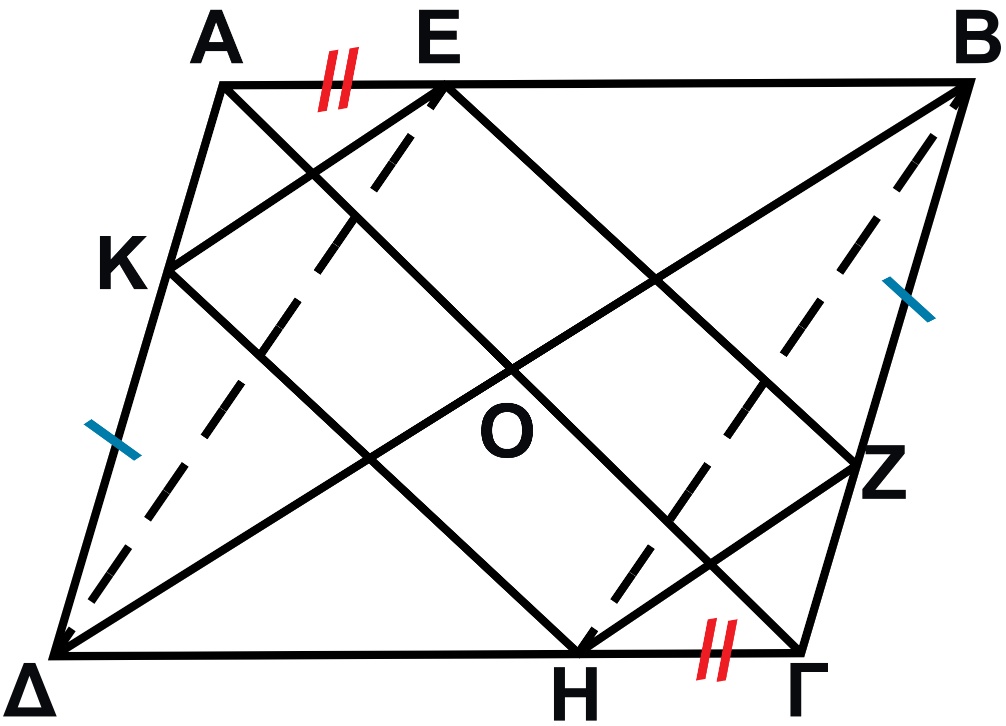
Σύνθετα Θέματα

1. i) Έχουμε: $\overset{\triangle}{AEK} = \overset{\triangle}{\Gamma H Z}$ ($AE = \Gamma H$, $AK = \Gamma Z$, $\hat{A} = \hat{\Gamma}$) και $\overset{\triangle}{BEZ} = \overset{\triangle}{\Delta K H}$ ($\Delta K = BZ$, $EB = \Delta H$, $\hat{B} = \hat{\Delta}$), οπότε $KE = ZH$ και $EZ = KH$.
Άρα ΕΖΗΚ παραλληλόγραμμο.

ii) Επειδή ΒΕ//=ΔΗ το ΔΕΒΗ είναι παραλληλόγραμμο. Άρα

$$\left.\begin{array}{l} A\Gamma,\ B\Delta \text{ διαγώνιοι του } AB\Gamma\Delta \\ B\Delta,\ EH \text{ διαγώνιοι του } \Delta EBH \\ EH,\ KZ \text{ διαγώνιοι του } EZHK \end{array}\right\}$$

$$\left\}\begin{array}{l} \text{άρα οι } A\Gamma,\ B\Delta \\ EH \text{ και } KZ \\ \text{συντρέχουν στο } O. \end{array}\right.$$



2. Έχουμε:

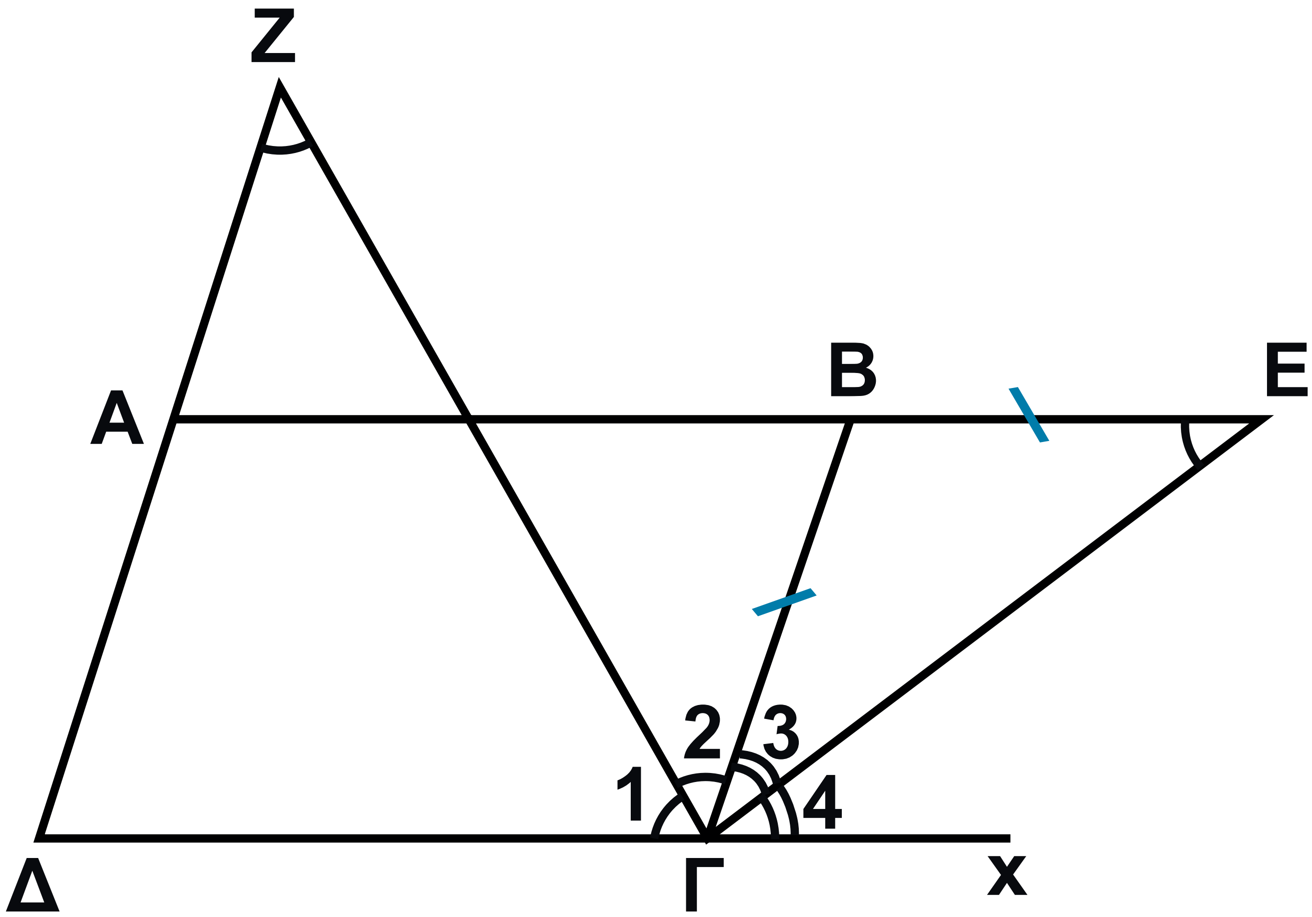
$$\left.\begin{array}{l}\hat{Z} = \hat{\Gamma}_1 \quad (\Delta Z = \Delta\Gamma) \\ \hat{Z} = \hat{\Gamma}_2\end{array}\right\} \text{ άρα } \hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2 \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l}\hat{E} = \hat{\Gamma}_3 \quad (BE = B\Gamma) \\ \hat{E} = \hat{\Gamma}_4\end{array}\right\} \text{ άρα } \hat{\Gamma}_3 = \hat{\Gamma}_4 \quad (2)$$

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι $Z\Gamma \perp \Gamma E$ (διχοτόμοι εφεξής και

παραπληρωματικών γωνιών)

άρα: $Z\hat{\Gamma}E = 90^\circ$.



3. Έχουμε $\overset{\triangle}{BEΓ}$:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{E} = \hat{Γ}_1 \quad (BE = BΓ) \\ \text{και } \hat{B} = \hat{E} + \hat{Γ}_1 \text{ (εξωτ.)} \end{array}\right\}$$

$$\left.\right\} \text{ άρα } \hat{Γ}_1 = \hat{E} = \frac{\hat{B}}{2} \quad (1)$$

Επίσης στο $\overset{\triangle}{ΔΓZ}$:

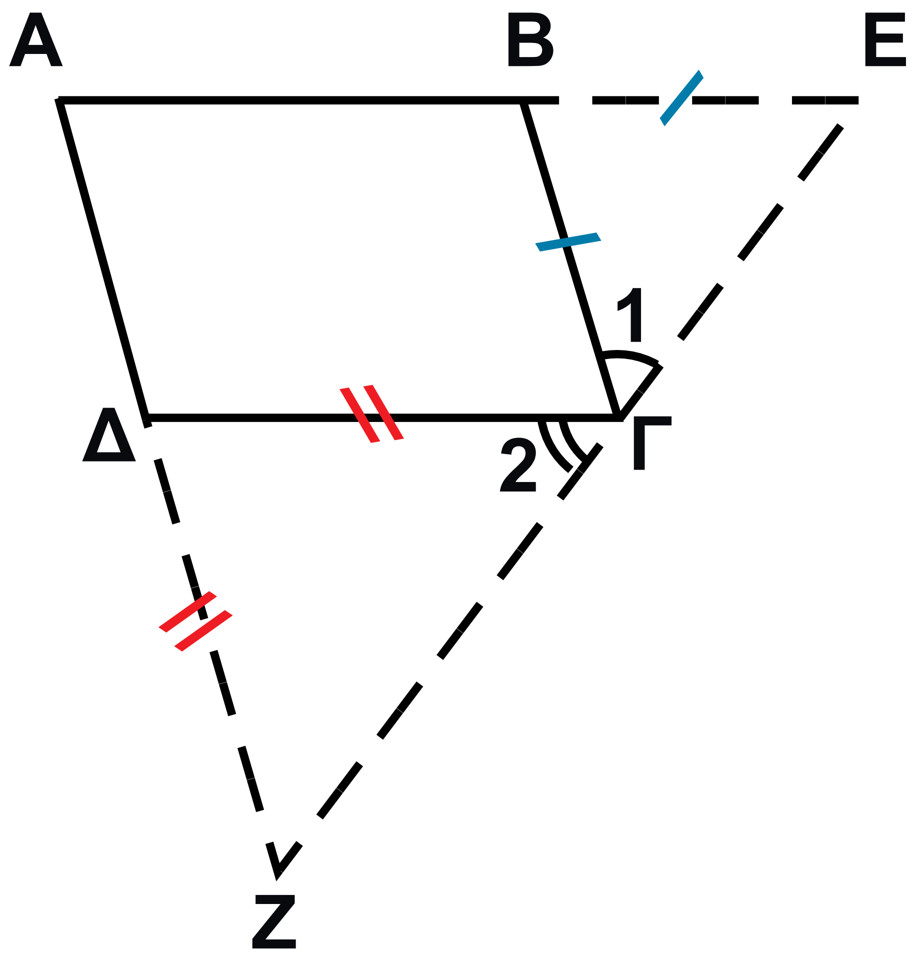
$$\left.\begin{array}{l} \hat{Z} = \hat{Γ}_2 \quad (ΔΓ = ΔZ) \\ \text{και } \hat{Δ} = \hat{Z} + \hat{Γ}_2 \text{ (εξωτ.)} \end{array}\right\}$$

$$\left.\right\} \text{ άρα } \hat{Γ}_2 = \hat{Z} = \frac{\hat{Δ}}{2} = \frac{\hat{B}}{2} \quad (2)$$

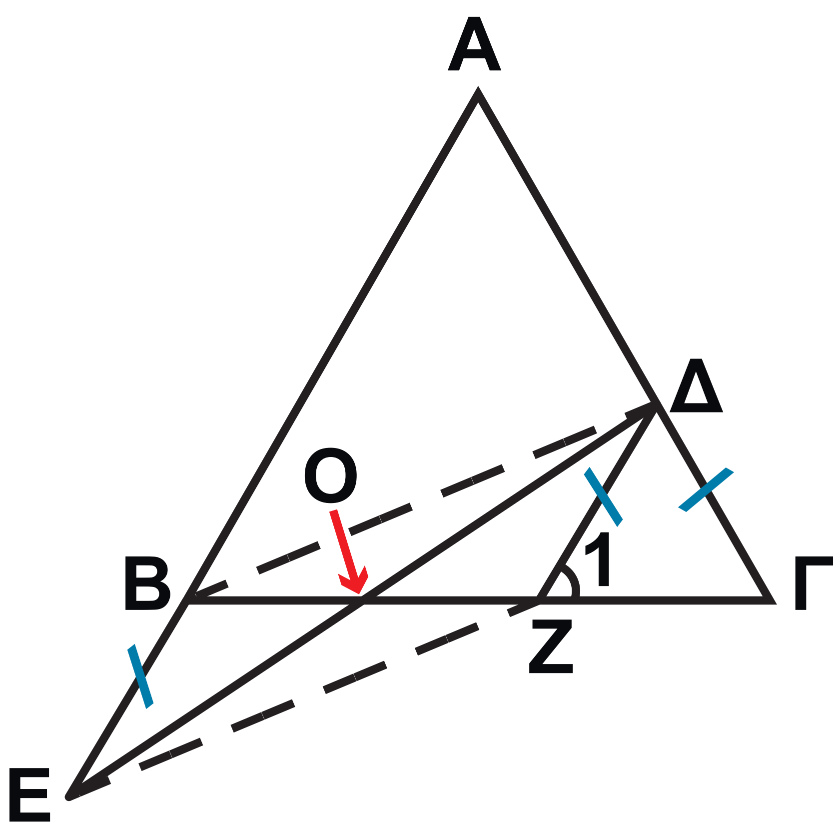
Άρα:

$$\hat{Γ}_1 + \hat{Γ}_2 + \hat{Γ} = \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} + \hat{Γ} = \hat{B} + \hat{Γ} = 180^\circ,$$

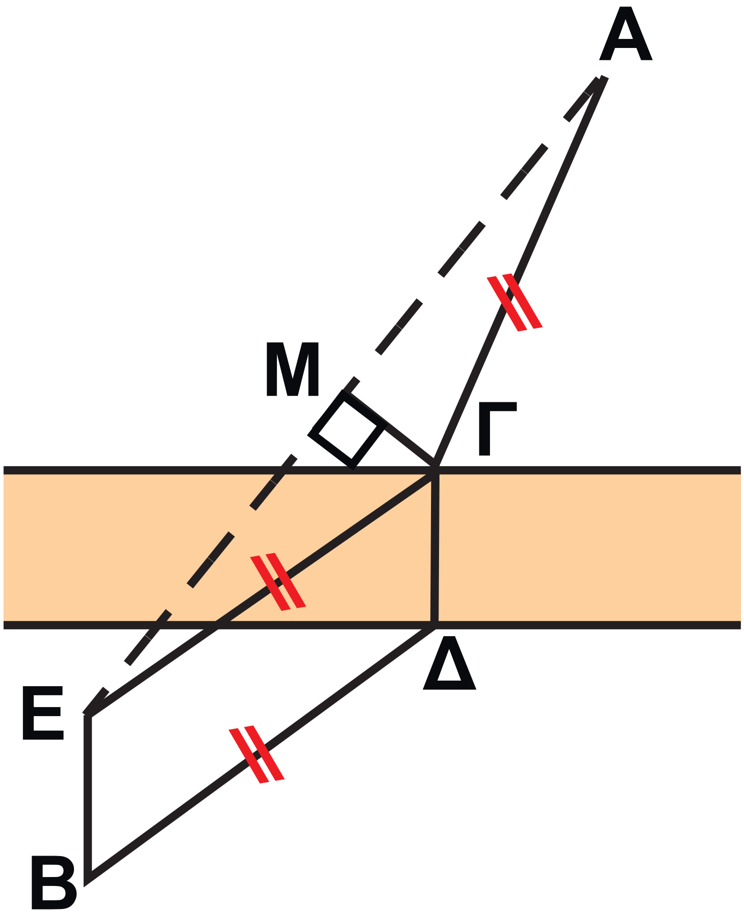
οπότε τα Ζ, Γ, Ε είναι συνευθεια-κά.



4. Φέρουμε ΔΖ//ΑΒ.
Τότε $\hat{Z}_1 = \hat{B} = \hat{\Gamma}$, άρα ΔΖ = ΔΓ = ΒΕ.
Επομένως ΔΖ//=ΒΕ, οπότε το ΒΔΖΕ παραλληλόγραμμο.
Άρα Ο μέσο ΔΕ.



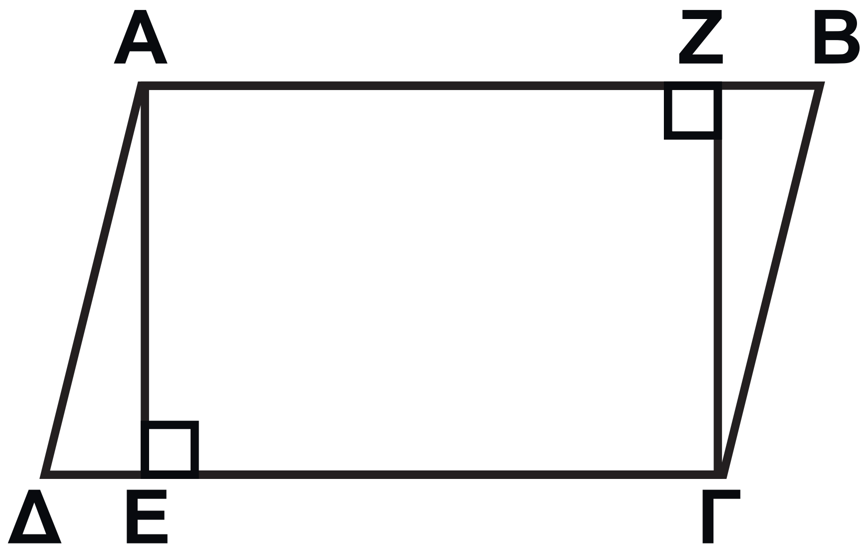
5. Υποθέτουμε ότι το πρόβλημα είναι λυμένο και έστω ΓΔ η θέση της γέφυρας και ΑΓ = ΒΔ, όπου Α και Β τα δύο χωριά. Εάν φέρουμε μια βοηθητική ευθεία ΒΕ, παράλληλη και ίση προς την ΓΔ, παρατηρούμε ότι το σημείο Γ προσδιορίζεται από την κάθετη ΓΜ στο μέσο Μ της ΑΕ (μεσοκάθετος). Πράγματι το ΓΔΒΕ είναι παραλληλόγραμμο (ΓΔ//= ΒΕ) και επομένως ΒΔ = ΕΓ = ΑΓ.



§ 5.3-5.5

Ασκήσεις Εμπέδωσης

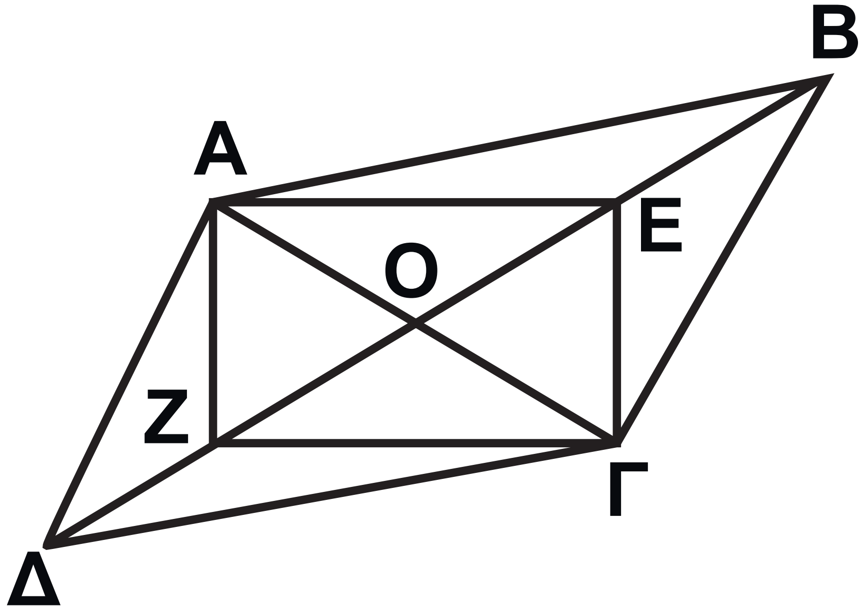
1. Έχουμε ΑΕ//=ΓΖ, οπότε το ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο. Επειδή $\hat{E} = 90^\circ$ το ΑΕΓΖ είναι ορθογώνιο.



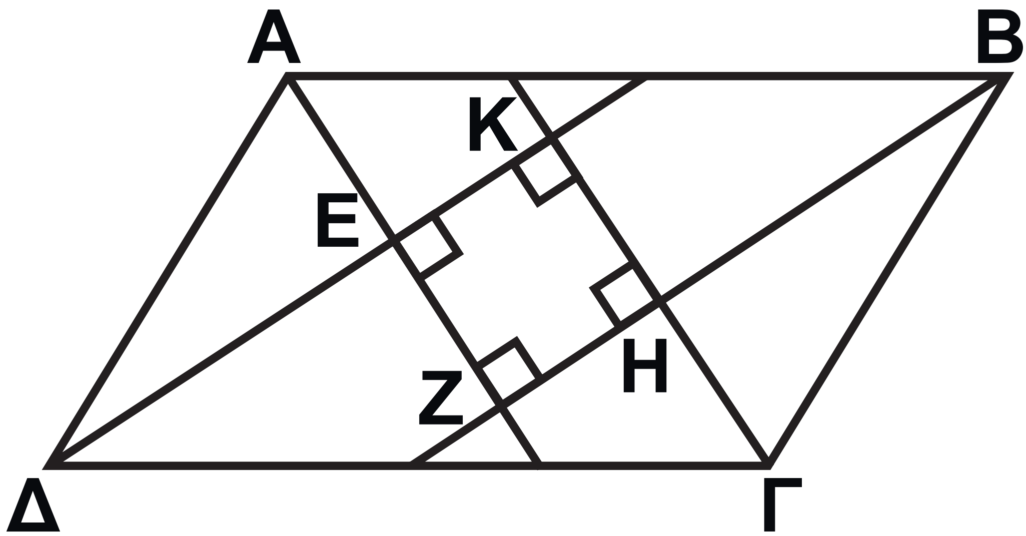
2. Το ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο, αφού οι διαγώνιοί του διχοτομούνται. Επειδή

$$ΕΖ = ΟΕ + ΟΖ = \frac{ΟΒ}{2} + \frac{ΟΔ}{2} = \frac{ΔΒ}{2} = ΑΓ$$

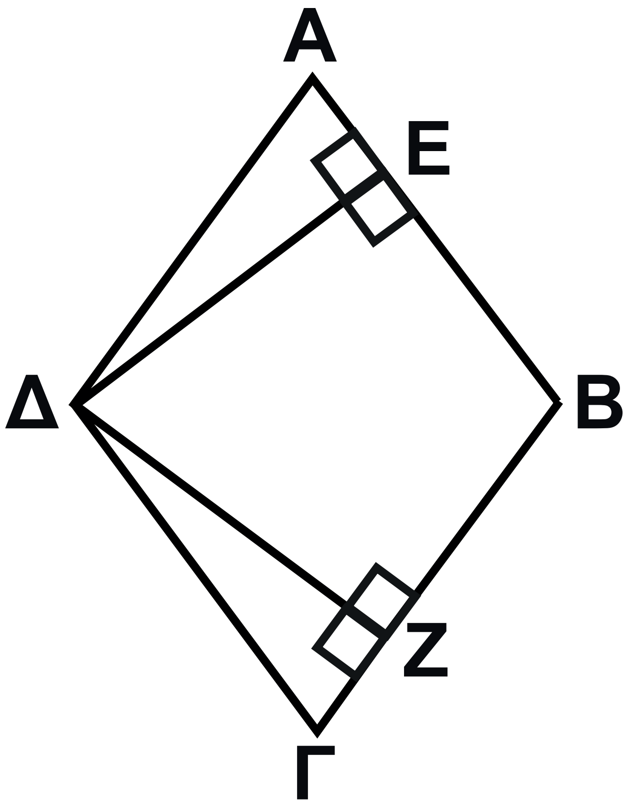
το ΑΕΓΖ είναι ορθογώνιο.



3. Έχουμε ΑΕ ⊥ ΔΕ, ΒΗ ⊥ ΓΗ και ΑΖ ⊥ ΒΖ γιατί οι διχοτόμοι των εντός και επί τα αυτά μέρη γωνιών τέμνονται κάθετα (εφαρ. § 4.4). Άρα $\hat{E} = \hat{Z} = \hat{H} = 90^\circ$, οπότε το ΕΖΗΚ είναι ορθογώνιο.



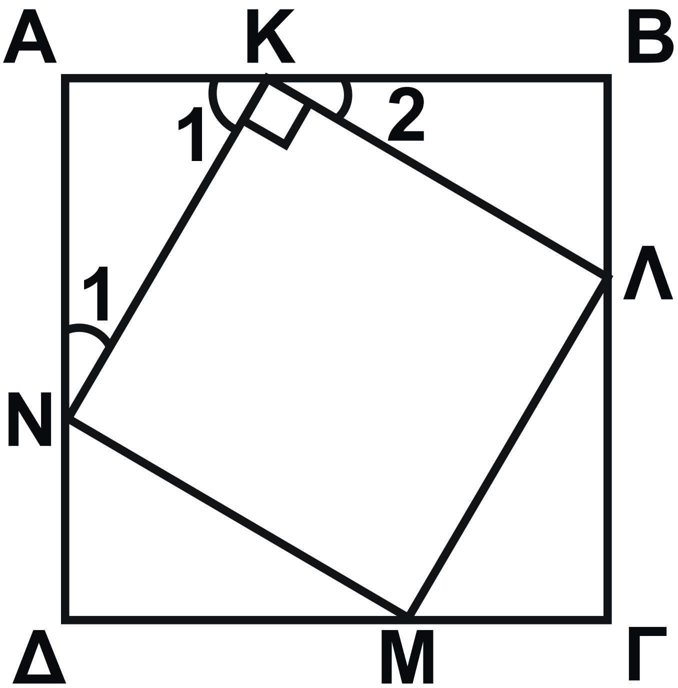
4. Έστω ΑΒΓΔ ρόμβος. Τότε
$\overset{\triangle}{A\Delta E} = \overset{\triangle}{\Delta \Gamma Z}$ ($\hat{A} = \hat{\Gamma}$, $\hat{E} = \hat{Z} = 90^\circ$,
$A\Delta = \Delta\Gamma$).
Άρα $\Delta E = \Delta Z$.
Έστω ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο και $\Delta E = \Delta Z$.
Τότε $\overset{\triangle}{A\Delta E} = \overset{\triangle}{\Delta \Gamma Z}$ ($\hat{A} = \hat{\Gamma}$, $\hat{E} = \hat{Z} = 90^\circ$,
$\Delta E = \Delta Z$).
Άρα $A\Delta = \Delta\Gamma$, οπότε το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος.



5. Έχουμε

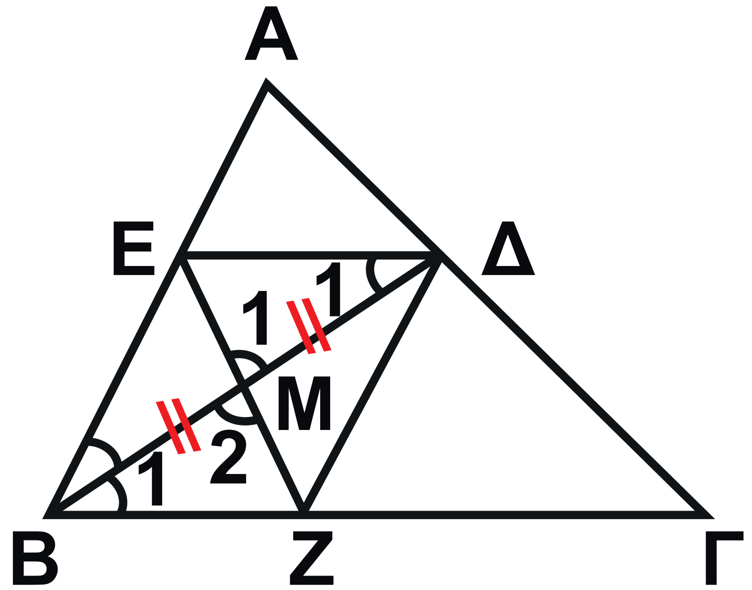
$$\left.\begin{aligned} &ΕΖ \perp ΒΔ \\ &ΕΖ = ΒΔ \\ &Ο \text{ μέσο } ΕΖ,\ ΔΒ \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\text{Άρα το ΔΕΒΖ} \\ &\text{είναι τετράγωνο.} \end{aligned}$$

6. Έχουμε $\overset{\triangle}{ΑΚΝ} = \overset{\triangle}{ΒΚΛ} = \overset{\triangle}{ΜΓΛ} = \overset{\triangle}{ΜΔΝ}$, οπότε $ΚΛ = ΛΜ = ΜΝ = ΝΚ$ (1)
Επίσης $\hat{Κ}_2 = \hat{Ν}_1$, οπότε $\hat{Κ}_1 + \hat{Κ}_2 =$
$= \hat{Κ}_1 + \hat{Ν}_1 = 90^\circ$. Άρα $\hat{Κ} = 90^\circ$ (2)
Από (1), (2) προκύπτει ότι το ΚΛΜΝ είναι τετράγωνο.



Αποδεικτικές Ασκήσεις

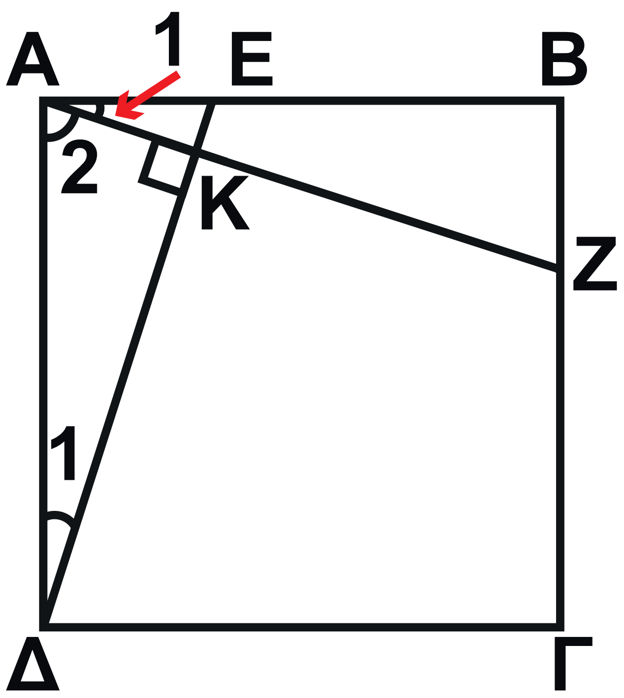
1. Έχουμε $\overset{\triangle}{\Delta EM} = \overset{\triangle}{MBZ}$ (ΒΜ = ΜΔ, $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$, $\hat{\Delta}_1 = \hat{B}_1$).
Άρα ΔΕ = ΒΖ. Αλλά ΔΕ//ΒΖ, οπότε το ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο. Επειδή ΒΔ διχοτόμος της $\hat{B}$ το ΔΕΒΖ είναι ρόμβος.



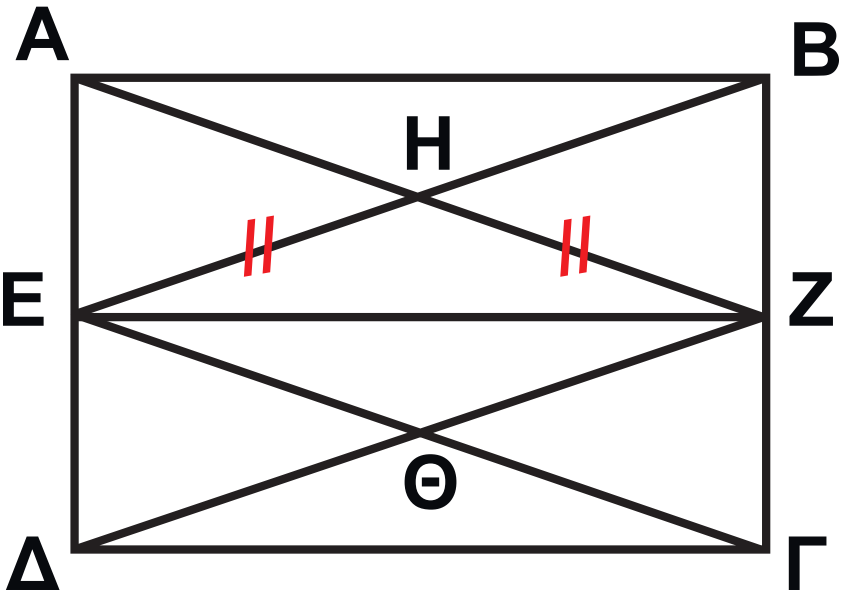
2. i) $\overset{\triangle}{AB Z} = \overset{\triangle}{A\Delta E}$ ($AE = BZ$, $AB = A\Delta$, $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$).

Άρα $AZ = \Delta E$.

ii) Έχουμε $\hat{\Delta}_1 = \hat{A}_1$, οπότε $\hat{\Delta}_1 + \hat{A}_2 = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \hat{A} = 90^\circ$, οπότε $\hat{K} = 90^\circ$ (στο τριγ. $\overset{\triangle}{A\Delta K}$). Άρα $AZ \perp \Delta E$.



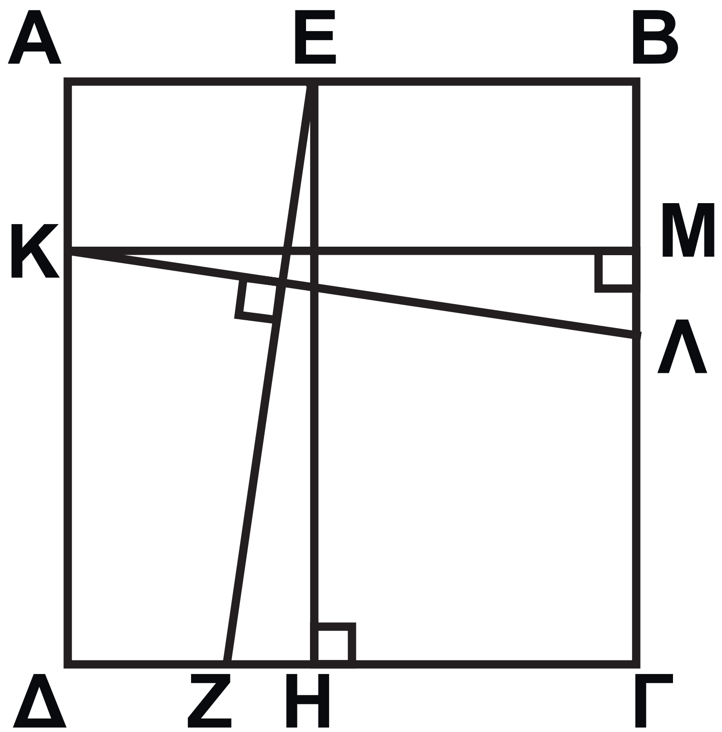
3. Έχουμε ΕΒΖΔ παραλληλόγραμμο (ΒΖ//=ΔΕ), οπότε ΒΕ//=ΔΖ. Άρα ΕΗ//=ΖΘ και ΕΗ = ΗΖ (αφού ΑΒΖΕ, ΔΓΖΕ ορθογώνια). Επομένως το ΕΘΖΗ είναι ρόμβος.



4. Έστω ΚΛ ⊥ ΕΖ. Φέρουμε ΕΗ ⊥ ΔΓ και ΚΜ ⊥ ΒΓ. Τότε ΚΜ = ⊥ ΕΗ.

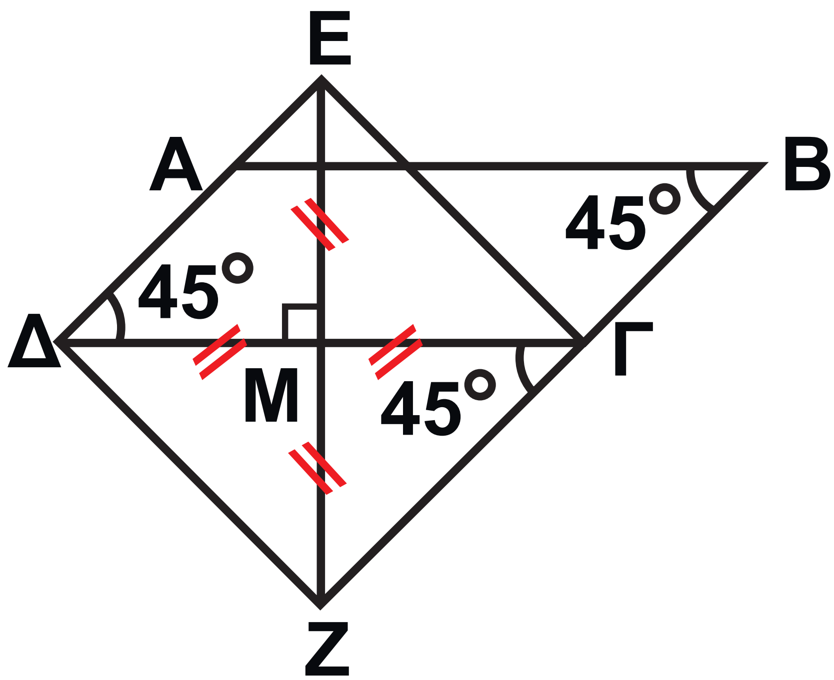
Άρα $\overset{\triangle}{EZH} = \overset{\triangle}{K\Lambda M}$ ($\hat{H} = \hat{M} = 90^\circ$, ΚΜ = ΕΗ, $\hat{K} = \hat{E}$ ως οξείες με κάθετες πλευρές).

Επομένως ΕΖ = ΚΛ.

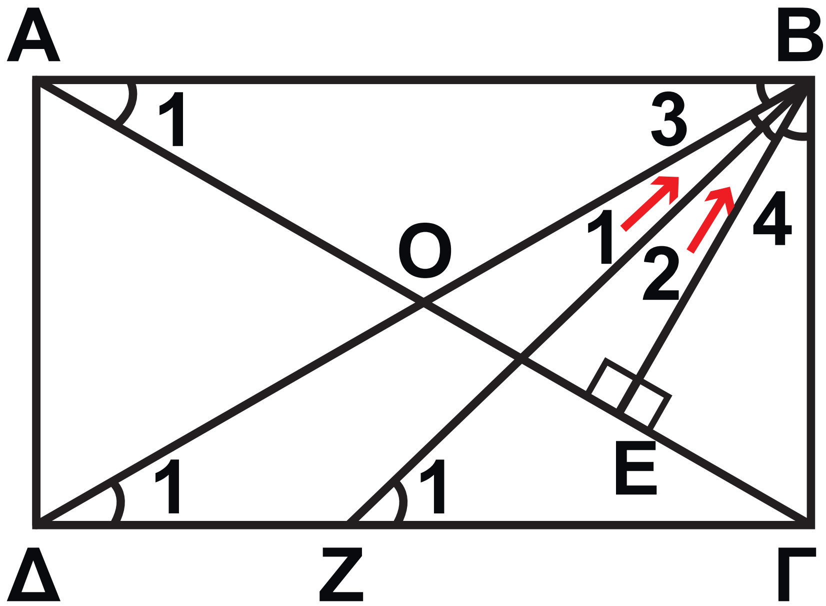


Σύνθετα Θέματα

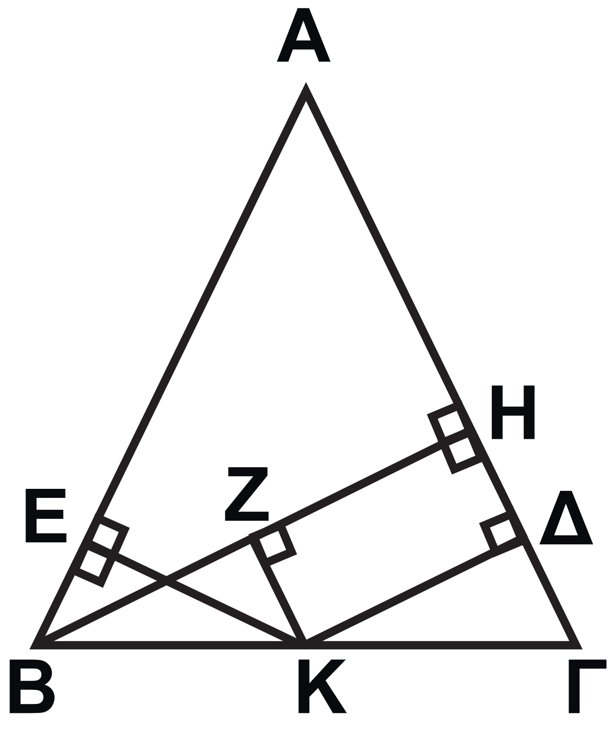
1. Έχουμε $\overset{\triangle}{ΜΕΔ} = \overset{\triangle}{ΜΖΓ}$ ($\hat{Μ}_1 = \hat{Μ}_2 = 90^\circ$, $ΔΜ = ΜΓ$, $\hat{Δ} = \hat{Γ} = 45^\circ$), οπότε $ΔΕ = ΓΖ$.
Αλλά ΔΕ//ΓΖ, οπότε το ΔΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο.
Επειδή $ΕΖ \perp ΔΓ$ και $ΔΜ = ΜΕ$ ($\hat{Δ} = 45^\circ$), οπότε $ΕΖ = ΔΓ$ το ΔΕΓΖ είναι τετράγωνο.



2. Έχουμε $\hat{A}_1 = \hat{B}_3 = \hat{\Delta}_1$ (1) (αφού ΑΒΓΔ ορθογώνιο) και $\hat{A}_1 = \hat{B}_4$ (2) (οξείες με κάθετες πλευρές). Επομένως $\hat{Z}_1 = \hat{\Delta}_1 + \hat{B}_1$ (ως εξωτερική) $\overset{(1),\,(2)}{=} \hat{B}_4 + \hat{B}_1 = \hat{B}_4 + \hat{B}_2$, οπότε $\hat{Z}_1 = \Gamma\hat{B}Z$. Άρα ΒΓ = ΓΖ.



3. i) Έστω Κ τυχαίο σημείο της βάσης, ΒΓ, $ΚΔ \perp ΑΓ$, $ΚΕ \perp ΑΒ$. Φέρουμε $ΚΖ \perp ΒΗ$. Τότε ΚΔ = ΖΗ και ΚΕ = ΒΖ (αφού $Β\overset{\triangle}{\hat{Ε}}Κ = Β\overset{\triangle}{\hat{Ζ}}Κ$ γιατί $\hat{Ζ} = \hat{Ε} = 90^\circ$, ΚΒ κοινή, $\hat{Β} = \hat{Γ} = Β\hat{Κ}Ζ$).
Άρα ΚΔ + ΚΕ = ΖΗ + ΒΖ = ΒΗ = = σταθερό.

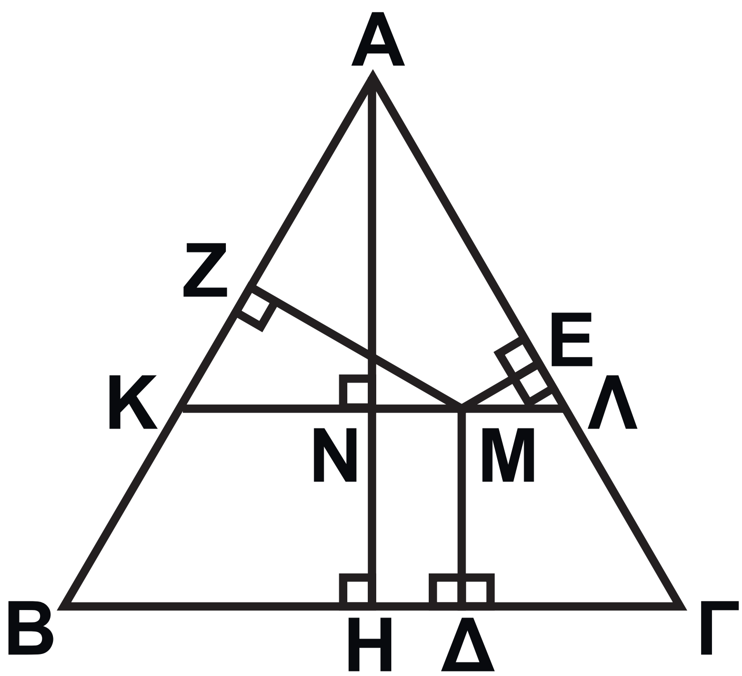


ii) Έστω Μ τυχαίο σημείο. Φέρουμε από το Μ παράλληλη προς τη ΒΓ που τέμνει τις ΑΒ, ΑΓ στα Κ, Λ αντίστοιχα. Τότε από το i) έχουμε:

ΜΖ + ΜΕ = ΑΝ (1) (αφού το τριγ. $\overset{\triangle}{\text{ΑΚΛ}}$ είναι ισόπλευρο).

Επίσης ΜΔ = ΝΗ (2)

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι ΜΔ + ΜΕ + ΜΖ = ΑΗ = σταθερό.



§ 5.6-5.9

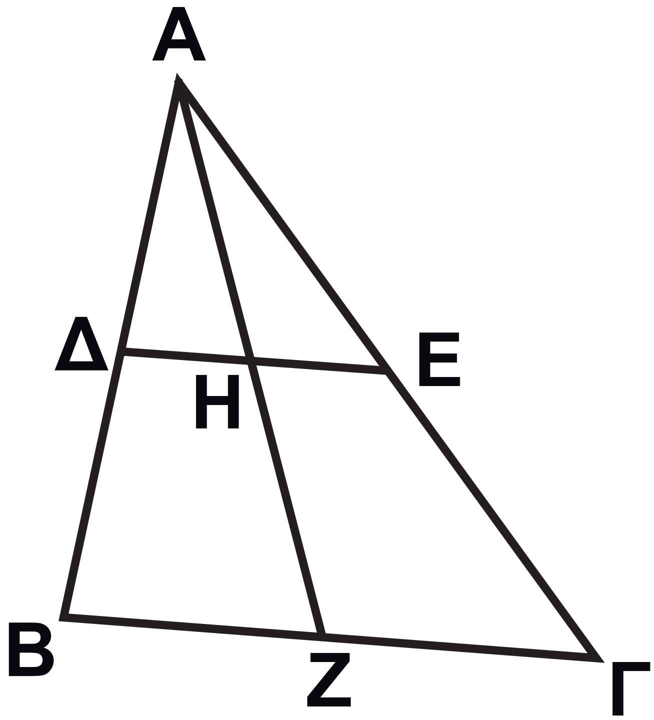
Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Έχουμε

$$\overset{\triangle}{AB\Gamma}: \left.\begin{array}{l} \Delta \text{ μέσο } AB \\ E \text{ μέσο } A\Gamma \end{array}\right\} \text{ άρα } \Delta E \parallel B\Gamma$$

και

$$\overset{\triangle}{ABZ}: \left.\begin{array}{l} \Delta \text{ μέσο } AB \\ \Delta E \parallel B\Gamma \end{array}\right\} \text{ άρα } H \text{ μέσο } AZ.$$



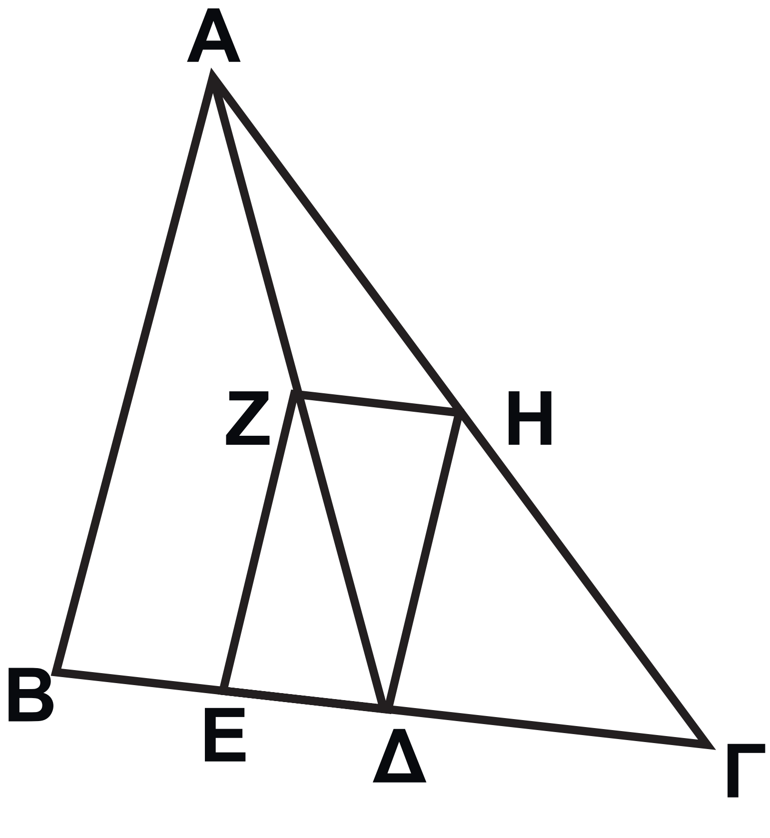
2. Έχουμε

$$\overset{\triangle}{AB\Gamma}: \left.\begin{array}{l} \text{Η μέσο ΑΓ} \\ \text{Δ μέσο ΒΓ} \end{array}\right\} \text{άρα } \Delta H /\!/ = \frac{AB}{2} \quad (1)$$

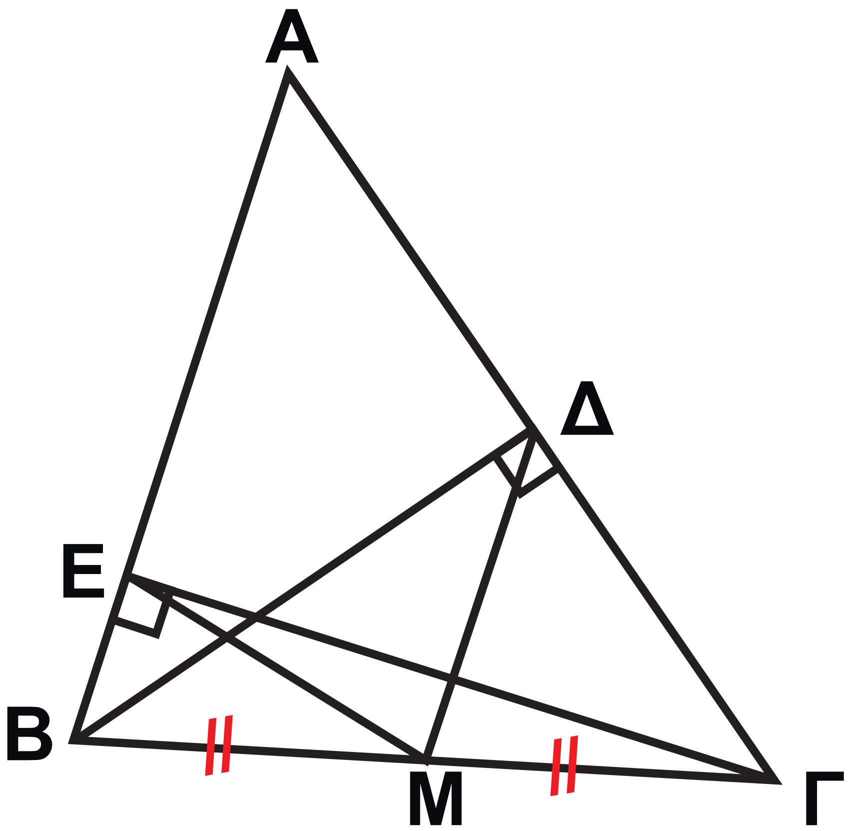
και

$$\overset{\triangle}{AB\Delta}: \left.\begin{array}{l} \text{Ζ μέσο ΑΔ} \\ \text{Ε μέσο ΒΔ} \end{array}\right\} \text{άρα } ZE /\!/ = \frac{AB}{2} \quad (2)$$

Από (1), (2) προκύπτει ότι ΔΗ//=ΖΕ, οπότε το ΔΕΖΗ είναι παραλληλόγραμμο.



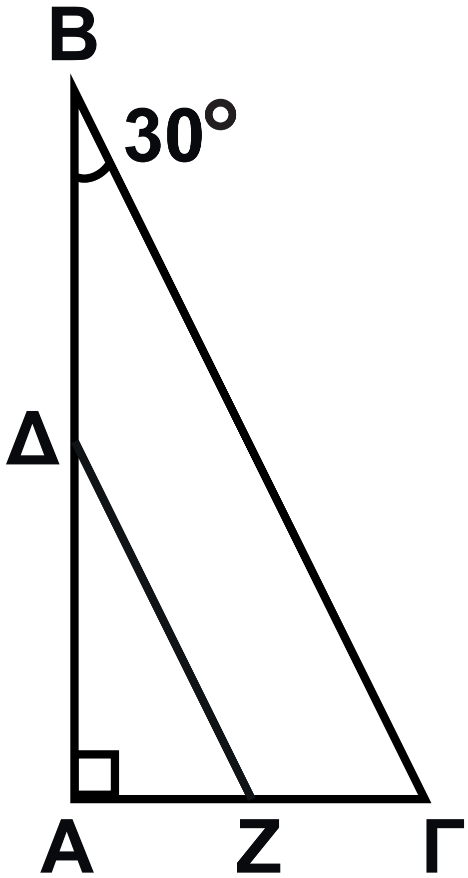
3. Έχουμε $B\overset{\triangle}{\Delta}\Gamma$ ($\hat{\Delta} = 90^\circ$, ΔΜ διάμεσος): $\Delta M = \dfrac{B\Gamma}{2}$ και $B\overset{\triangle}{E}\Gamma$ ($\hat{E} = 90^\circ$, ΕΜ διάμεσος): $EM = \dfrac{B\Gamma}{2}$. Άρα $M\Delta = ME$.



4. $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ $(\hat{A} = 90^\circ, \hat{B} = 30^\circ)$: $A\Gamma = \dfrac{B\Gamma}{2}$

και $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ (Ε, Ζ μέσα ΑΒ, ΑΓ):

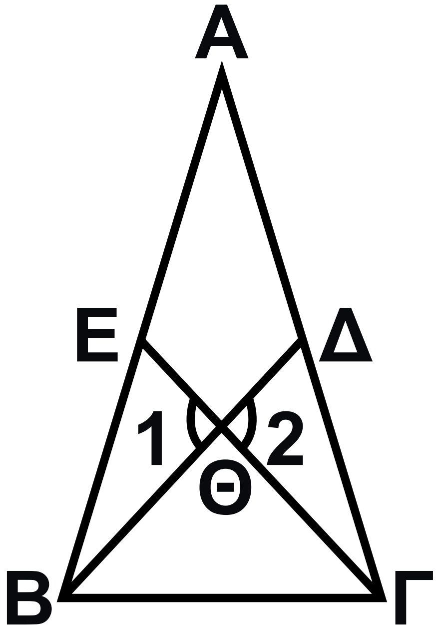
$EZ = \dfrac{B\Gamma}{2}$. Άρα ΕΖ = ΑΓ.



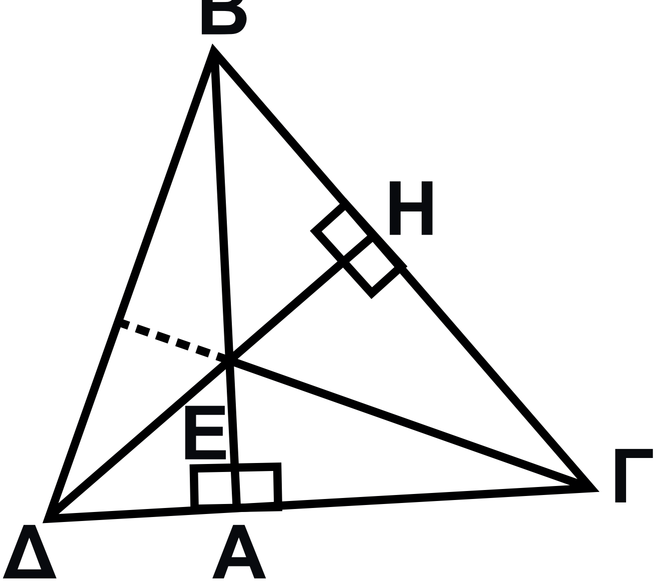
5. Έχουμε $B\overset{\triangle}{\Theta}E = \Gamma\overset{\triangle}{\Theta}\Delta$ $(\hat{\Theta}_1 = \hat{\Theta}_2$,

ΒΘ = ΘΓ, ΘΔ = ΘΕ).

Άρα ΒΕ = ΓΔ, οπότε β = γ.



6. Στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{\text{ΒΔΓ}}$ τα ΒΑ και ΔΗ είναι ύψη, οπότε το Ε είναι το ορθόκεντρο. Άρα ΓΕ ⊥ ΔΒ.



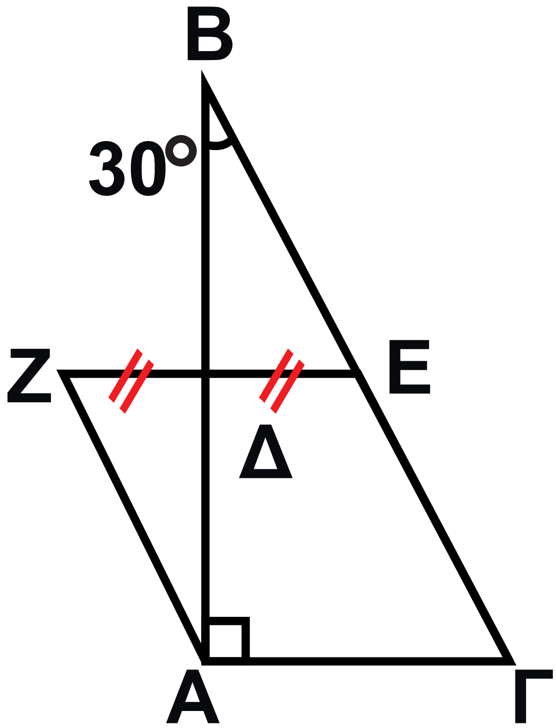
7. Έχουμε: $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$: (Δ, Ε μέσα ΑΒ, ΒΓ),

άρα ΔΕ //= $\dfrac{ΑΓ}{2}$, οπότε

ΖΕ = 2ΔΕ //= ΑΓ. Επομένως το ΑΓΕΖ είναι παραλληλόγραμμο.

Αλλά $\hat{Β} = 30^\circ$, οπότε $ΑΓ = \dfrac{ΒΓ}{2} = ΕΓ$.

Άρα το ΑΓΕΖ είναι ρόμβος.



Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. i) Έχουμε:

$\overset{\triangle}{\Delta E Z} = \overset{\triangle}{A E Z}$ (ΕΖ κοινή,

$\Delta E = \dfrac{AB}{2} = AE$, $\Delta Z = \dfrac{A\Gamma}{2} = AZ$).

Άρα $E\hat{\Delta}Z = \hat{A} = 90^\circ$.

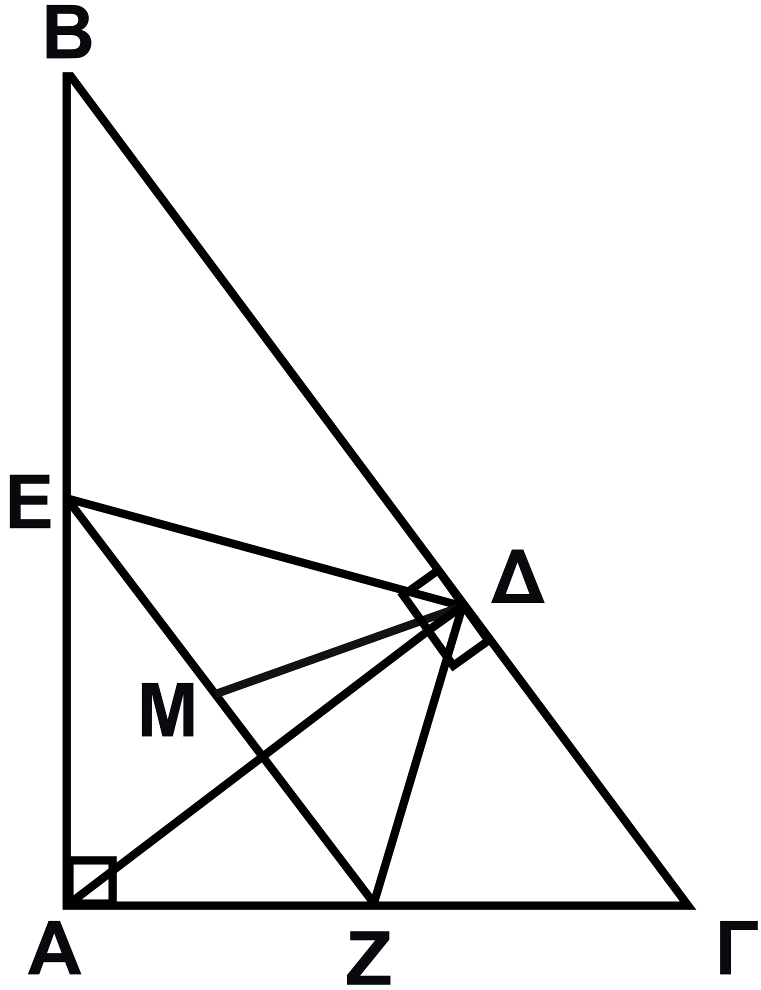
ii) Έχουμε: $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ (Ε, Ζ μέσα ΑΒ, ΑΓ):

$EZ = \dfrac{B\Gamma}{2}$ (1) και $\overset{\triangle}{E\Delta Z}$ ($\hat{\Delta} = 90^\circ$,

ΔΜ διάμεσος): $\Delta M = \dfrac{EZ}{2}$ (2)

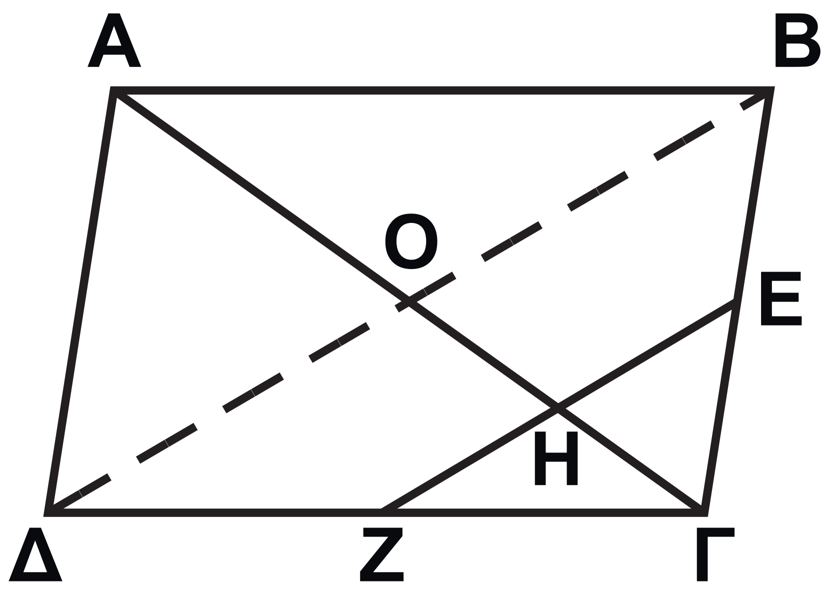
Από τις (1), (2) προκύπτει ότι

$\Delta M = \dfrac{B\Gamma}{4}$.



2. Φέρουμε ΔΒ. Τότε έχουμε: $\overset{\triangle}{\mathrm{ΒΓΔ}}$
(Ε, Ζ μέσα ΒΓ, ΓΔ):
ΕΖ//ΒΔ, οπότε Η μέσο του ΓΟ.

Άρα: $\mathrm{ΓΗ} = \dfrac{\mathrm{ΓΟ}}{2} = \dfrac{\mathrm{ΑΓ}}{4}$.



3. Στο τριγ. $M\overset{\triangle}{A}\Delta$ είναι:

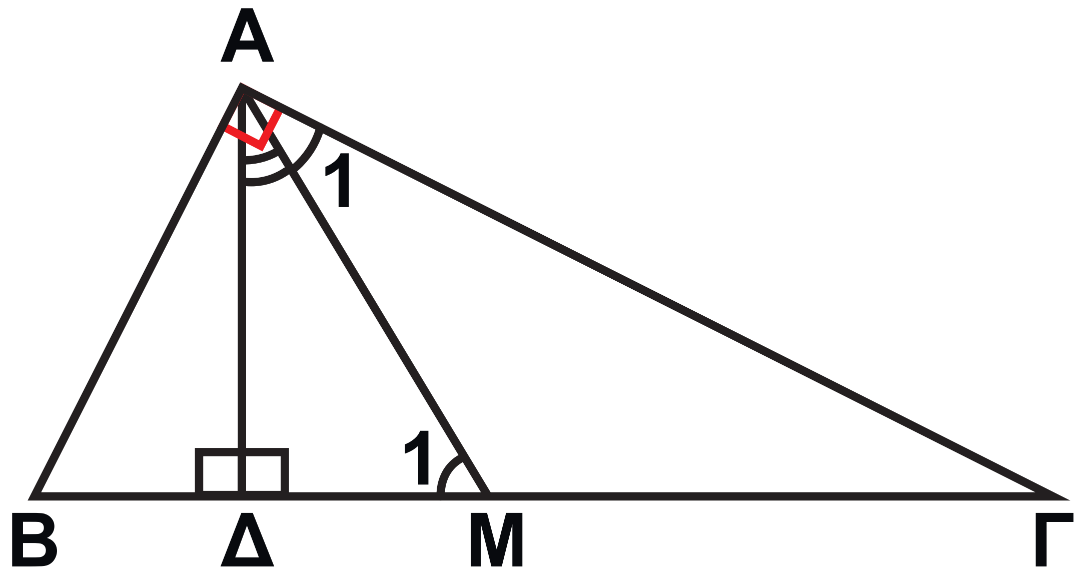
$M\hat{A}\Delta + \hat{M}_1 = 90^\circ$ (1)

Αλλά $\hat{M}_1 = \hat{\Gamma} + \hat{A}_1 = 2\hat{\Gamma}$ (2)

(αφού $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}$) και $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^\circ$ (3)

Από τις (1), (2), (3) προκύπτει ότι:

$M\hat{A}\Delta + 2\hat{\Gamma} = \hat{B} + \hat{\Gamma}$ ή $M\hat{A}\Delta = \hat{B} - \hat{\Gamma}$.



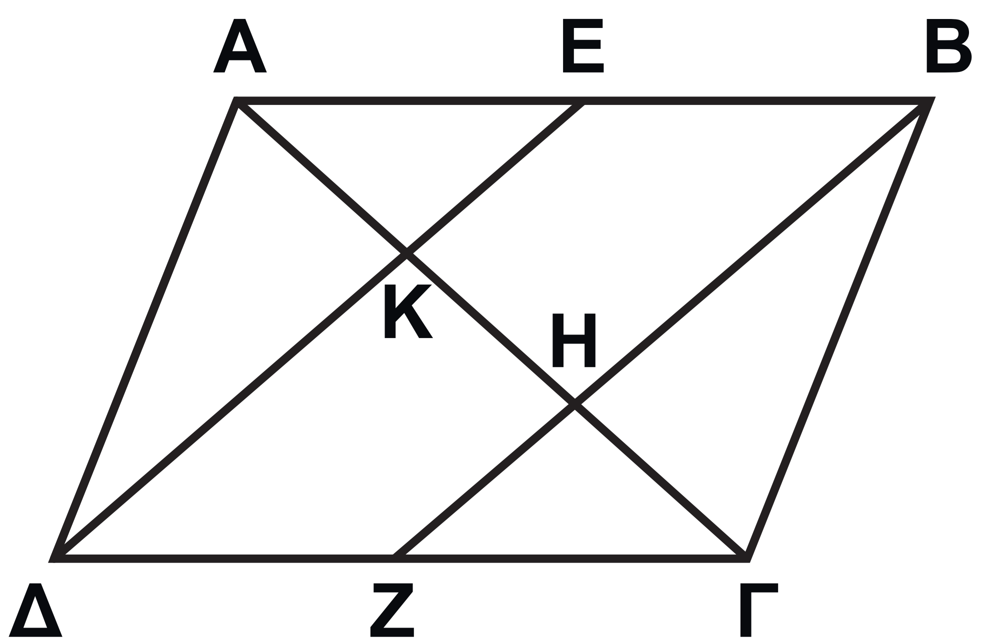
4. Έχουμε ΒΕ//=ΔΖ, οπότε το ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο. Άρα ΔΕ//ΒΖ.
Επομένως στο τριγ.

$\overset{\triangle}{ΑΒΗ}$: $\left.\begin{array}{l}\text{Ε μέσο ΑΒ}\\ \text{ΕΚ//ΒΗ}\end{array}\right\}$ άρα ΑΚ = ΚΗ (1)

και στο τριγ.

$\overset{\triangle}{ΓΔΚ}$: $\left.\begin{array}{l}\text{Ζ μέσο ΔΓ}\\ \text{ΖΗ//ΔΚ}\end{array}\right\}$ άρα ΓΗ = ΚΗ (2)

Από (1), (2) είναι ΑΚ = ΚΗ = ΓΗ.



5. Φέρουμε ΑΓ τότε: $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$: ΑΕ, ΒΟ διάμεσοι, οπότε Κ βαρύκεντρο. Άρα:

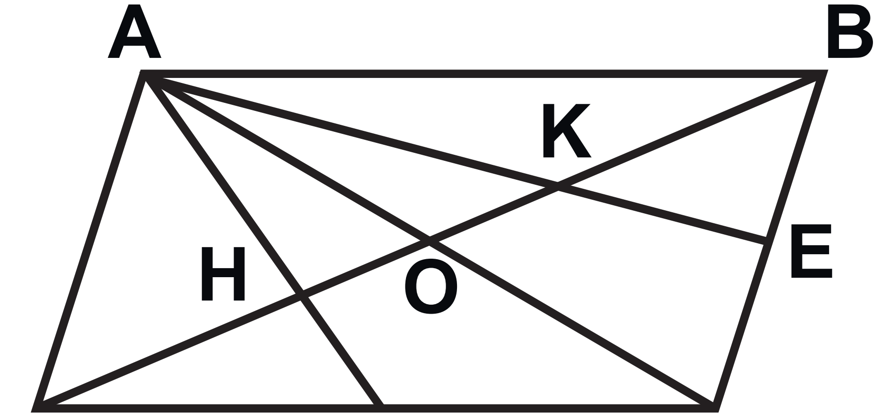
$$ΒΚ = \frac{2}{3}ΒΟ = \frac{2}{3} \cdot \frac{ΒΔ}{2} = \frac{ΒΔ}{3} \quad (1) \text{ και}$$

$\overset{\triangle}{ΑΔΓ}$: ΑΖ, ΔΟ διάμεσοι, οπότε Η βαρύκεντρο.

Άρα: $ΔΗ = \frac{2}{3}ΔΟ = \frac{2}{3} \cdot \frac{ΒΔ}{2} = \frac{ΒΔ}{3} \quad (2)$

Από τις (1), (2) θα είναι και

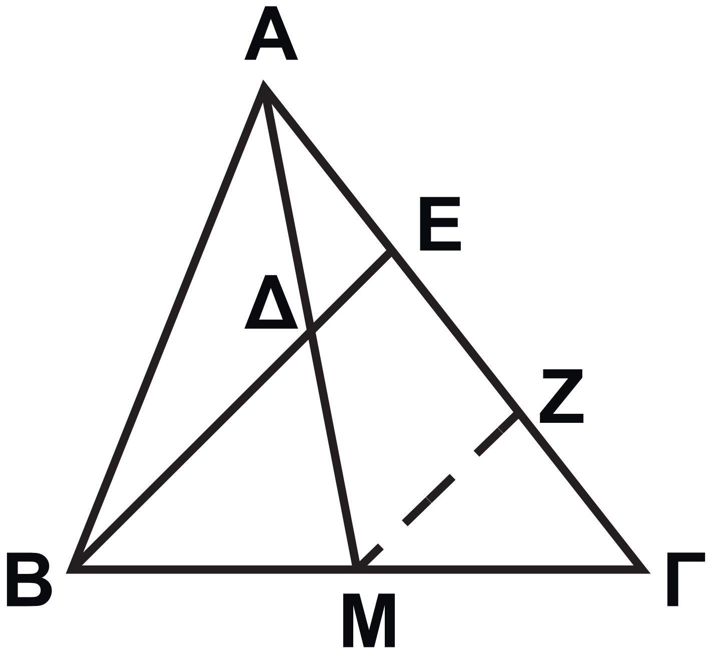
$ΚΗ = \frac{ΒΔ}{3}$, οπότε $ΔΗ = ΚΗ = ΒΚ = \frac{ΔΒ}{3}$.



6. Έστω Ζ το μέσο ΕΓ. Τότε:

$\overset{\triangle}{ΒΕΓ}$ (Μ, Ζ μέσα ΒΓ, ΕΓ): ΜΖ//ΒΕ (1) και $\overset{\triangle}{ΑΜΖ}$ (Δ μέσο ΑΜ, ΔΕ//ΜΖ από (1)): Ε μέσο ΑΖ, οπότε:

$ΑΕ = ΕΖ = \frac{ΕΓ}{2}$.



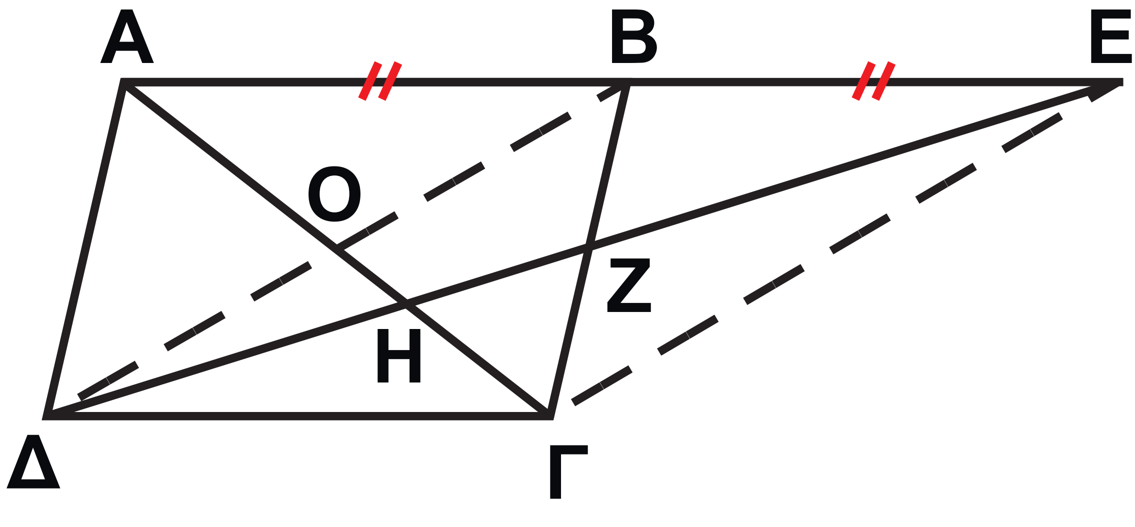
7. i) Έχουμε: ΒΕ = ΑΒ = ΓΔ, οπότε ΒΕ//=ΓΔ, άρα το ΒΕΓΔ είναι παραλληλόγραμμο. Επομένως ΒΖ = ΖΓ.

ii) Στο τριγ. $B\overset{\triangle}{\Delta}\Gamma$: ΓΟ, ΔΖ διάμεσοι, οπότε Η βαρύκεντρο.

Άρα: $\Gamma H = \frac{2}{3}\Gamma O = \frac{2}{3}\frac{A\Gamma}{2}$ ή $\Gamma H = \frac{1}{3}A\Gamma$.

Επομένως $AH = \frac{2}{3}A\Gamma$

Άρα $\Gamma H = \frac{AH}{2}$.



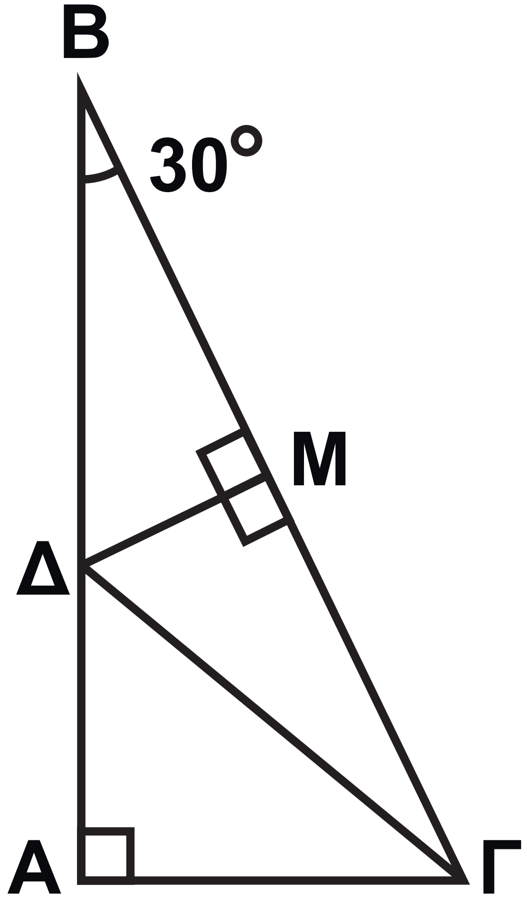
8. i) Έχουμε $\overset{\triangle}{M\Delta\Gamma} = \overset{\triangle}{\Gamma A\Delta}$ ($\hat{M} = \hat{A} = 90^\circ$, $\Delta\Gamma$ κοινή, $A\Gamma = \frac{B\Gamma}{2} = M\Gamma$. Άρα $M\Delta = A\Delta$.

ii) $\overset{\triangle}{M\Delta B}$ ($\hat{M} = 90^\circ$, $\hat{B} = 30^\circ$):

$M\Delta = \frac{\Delta B}{2} \Leftrightarrow \Delta B = 2M\Delta$.

Αλλά $A\Delta = M\Delta$, οπότε:

$\Delta B + A\Delta = 3M\Delta \Leftrightarrow M\Delta = \frac{AB}{3}$.



9. Αρκεί $\hat{H}_1 + \hat{K}_1 = 90^\circ$ (στο τριγ. $\overset{\triangle}{MHK}$).

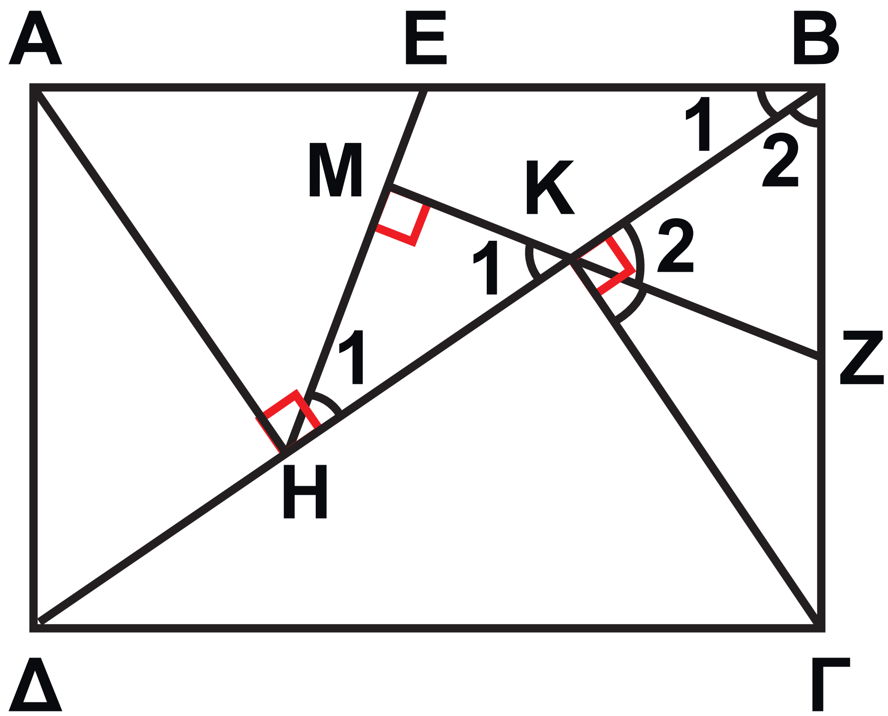
Έχουμε: $\overset{\triangle}{AHB}$: ($\hat{H} = 90^\circ$, ΗΕ διάμεσος) Άρα $\hat{H}_1 = \hat{B}_1$ (1)

και $\overset{\triangle}{KB\Gamma}$ ($\hat{K} = 90^\circ$, ΚΖ διάμεσος).

Άρα $\hat{K}_2 = \hat{K}_1 = \hat{B}_2$. (2)

Επομένως

$\hat{H}_1 + \hat{K}_1 = \hat{B}_1 + \hat{B}_2 = \hat{B} = 90^\circ$.

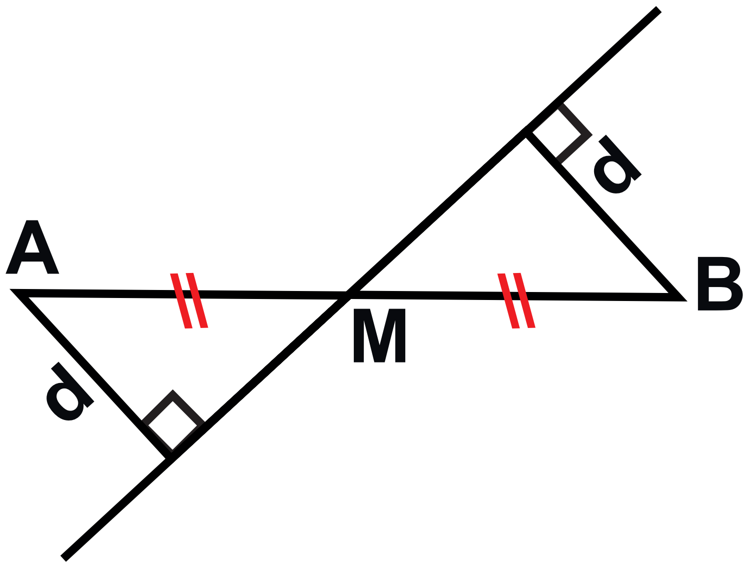


10. Παρατήρηση:

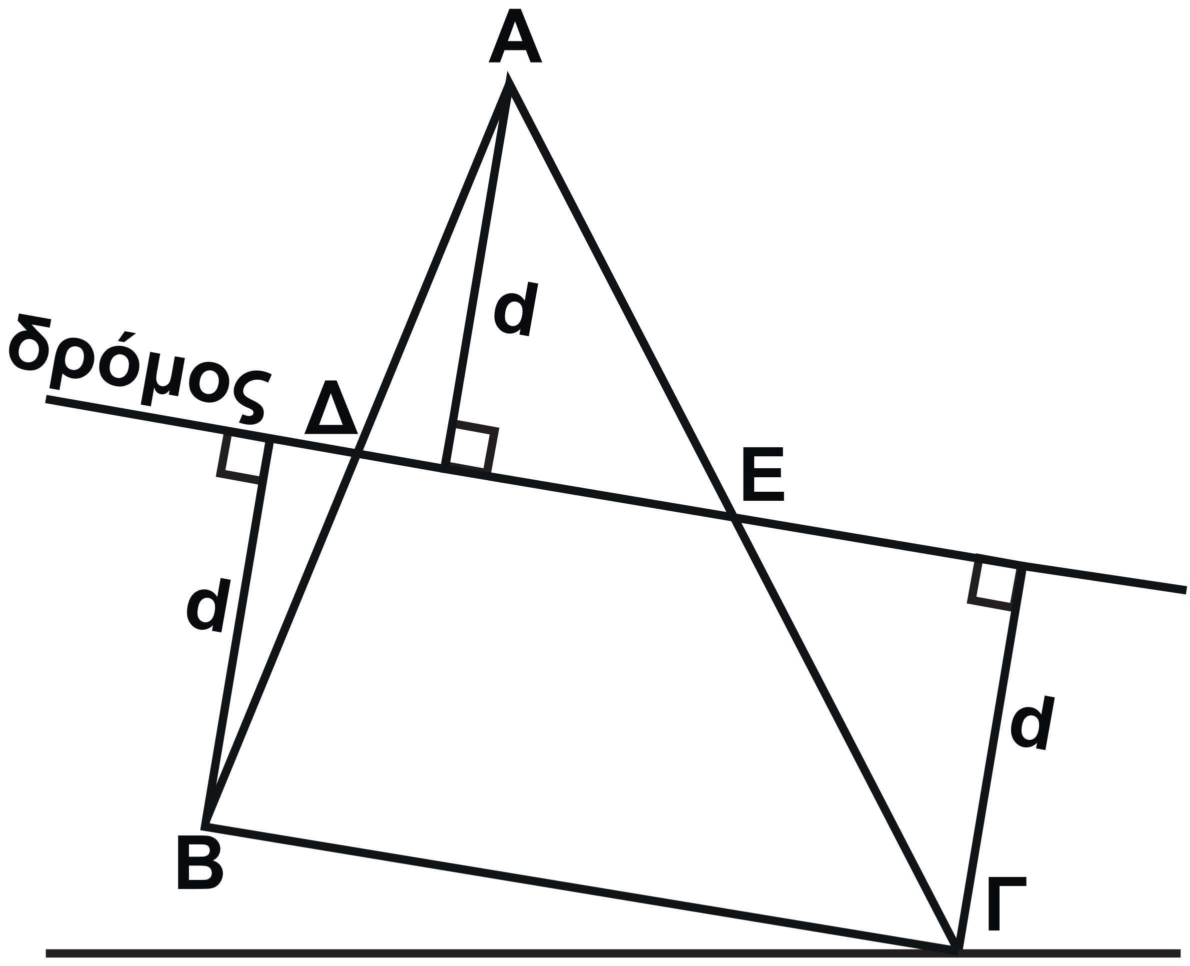
Δύο σημεία Α και Β ισαπέχουν:

i) Από κάθε ευθεία παράλληλη προς την ΑΒ

ii) Από κάθε ευθεία που διέρχεται από το μέσο του ΑΒ.



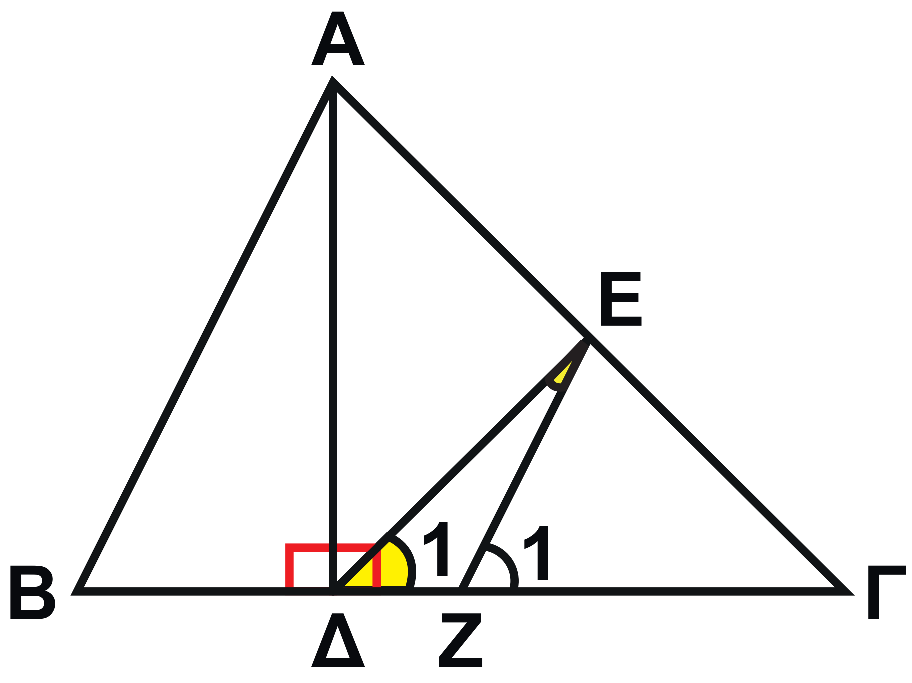
Έστω Α, Β και Γ τα τρία χωριά. Σύμφωνα με την παρατήρηση ο δρόμος πρέπει να συνδέει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$. Προφανώς υπάρχουν τρεις τέτοιοι δρόμοι.



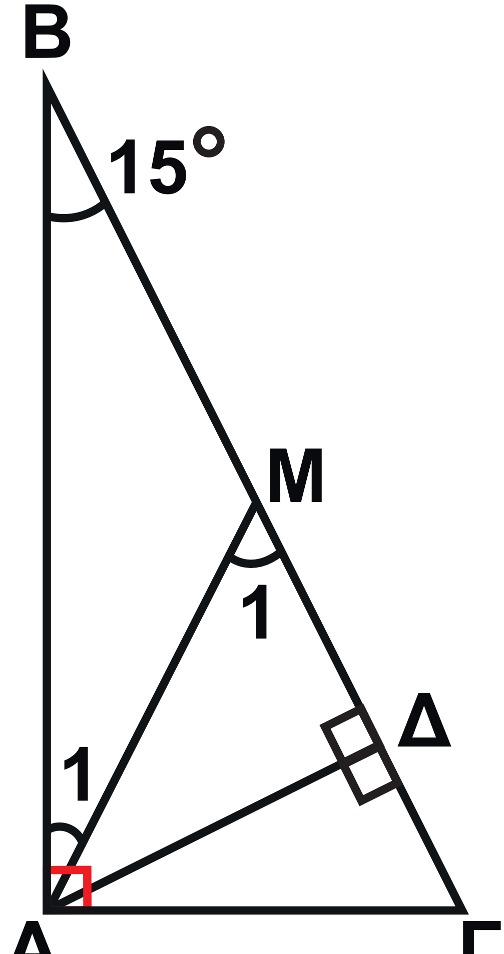
Σύνθετα Θέματα

1. Έχουμε $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$: (Ε, Ζ μέσα ΑΓ, ΒΓ).
Άρα ΕΖ//ΑΒ, οπότε $\hat{B} = \hat{Z}_1$ (1)
και $\overset{\triangle}{A\Delta\Gamma}$: ($\hat{\Delta} = 90^\circ$, ΔΕ διάμεσος).
Άρα ΔΕ = ΕΓ, οπότε $\hat{\Gamma} = \hat{Z}_1$ (2)
Αλλά

$$\hat{Z}_1 = \hat{\Delta}_1 + \Delta\hat{E}Z \overset{(1),(2)}{\Leftrightarrow} \Delta\hat{E}Z = \hat{B} - \hat{\Gamma}.$$



2. Φέρουμε τη διάμεσο ΑΜ. Τότε ΑΒ = ΒΜ, οπότε $\hat{A}_1 = \hat{B} = 15^\circ$. Άρα $\hat{M}_1 = \hat{A}_1 + \hat{B} = 30^\circ$. Επομένως στο τριγ. $M\overset{\triangle}{A}\Delta$ είναι $\hat{\Delta} = 90^\circ$, $\hat{M}_1 = 30^\circ$, άρα $A\Delta = \frac{AM}{2} = \frac{B\Gamma}{4}$, αφού $AM = \frac{B\Gamma}{2}$.



Αντίστροφα: Αν $ΑΔ = \frac{ΒΓ}{4}$, τότε

επειδή $ΑΜ = \frac{ΒΓ}{2}$ έχουμε $ΑΔ = \frac{ΑΜ}{2}$,

οπότε στο ορθογώνιο τριγ.

$M\overset{\triangle}{Α}Δ$ είναι $\hat{Α}_1 = 30^\circ$. Άρα

$\hat{Β} = \frac{\hat{Μ}_1}{2} = 15^\circ$.

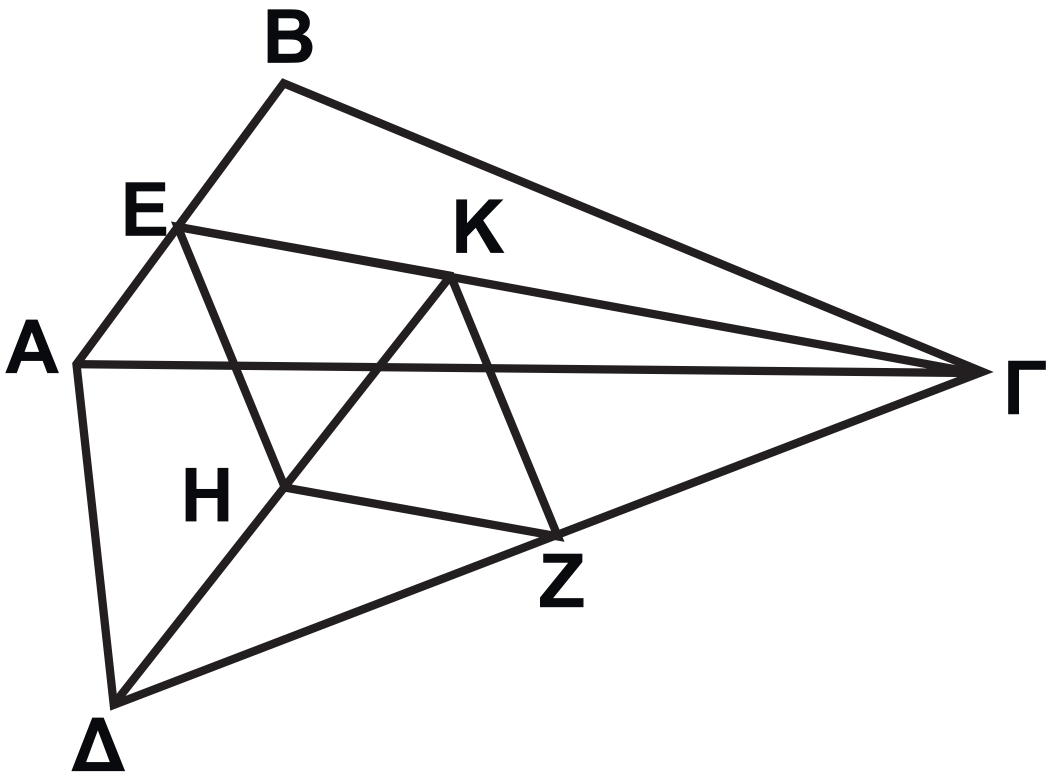
3. Έχουμε $Κ\overset{\triangle}{Δ}Γ$: (Ζ, Η μέσα ΔΓ, ΔΚ).

Άρα ΖΗ \\= $\frac{ΚΓ}{2}$ (1)

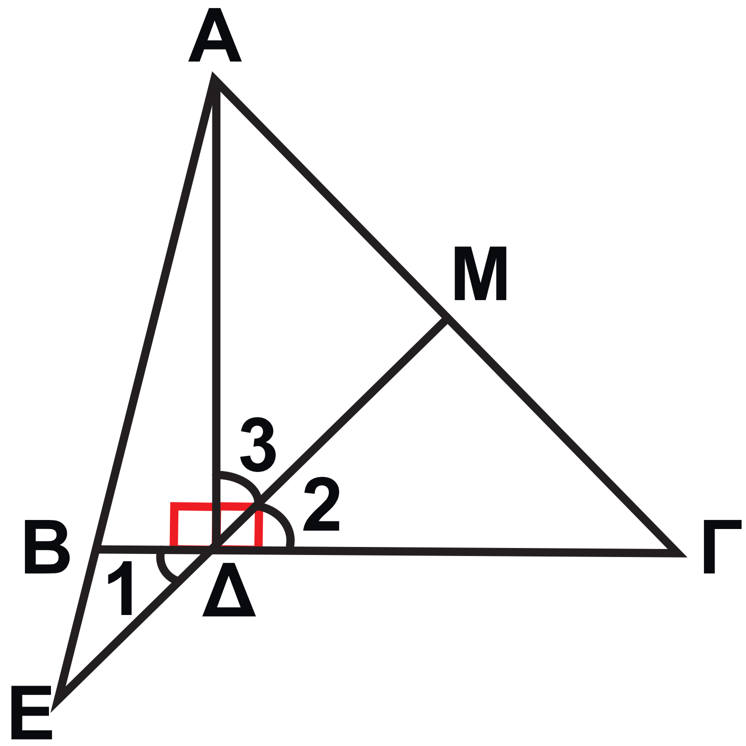
και Κ βαρύκεντρο του τριγ. $Α\overset{\triangle}{Β}Γ$,

άρα $ΕΚ = \frac{ΚΓ}{2}$ (2)

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι ΖΗ \\= ΕΚ, οπότε το ΕΚΖΗ είναι παραλληλόγραμμο. Άρα ΕΗ//ΚΖ.

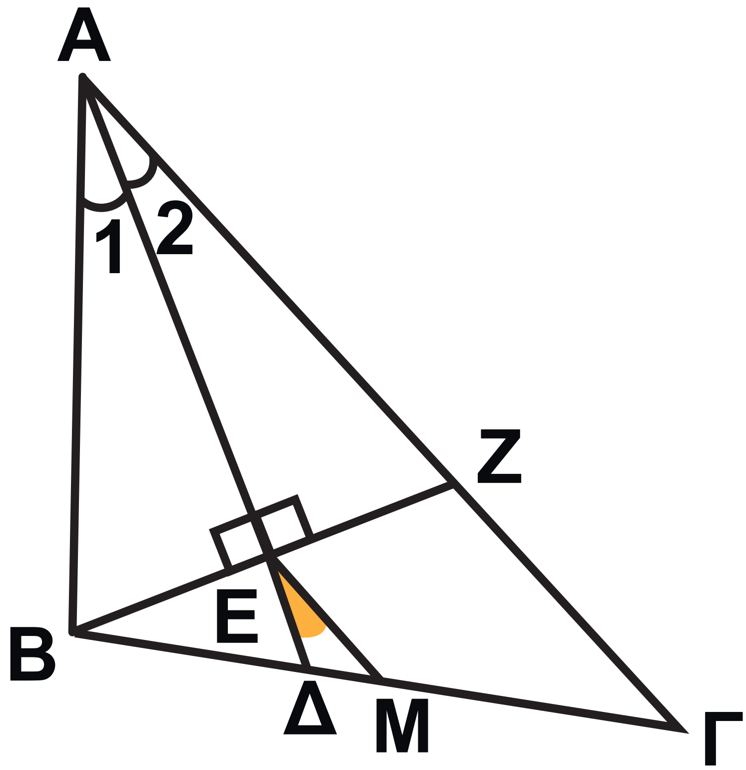


4. Επειδή ΒΔ = ΒΕ έχουμε
$\hat{E} = \hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$. Αλλά $\hat{B} = \hat{E} + \hat{\Delta}_1$, οπότε $\hat{B} = 2\hat{\Delta}_2 \Leftrightarrow 2\hat{\Gamma} = 2\hat{\Delta}_2 \Leftrightarrow \hat{\Delta}_2 = \hat{\Gamma}$.
Άρα ΔΜ = ΜΓ (1).
Επίσης $\hat{\Delta}_3 = \hat{A}_1$ (συμπληρωματικές ίσων γωνιών), οπότε
ΔΜ = ΑΜ (2).
Από τις (1), (2) προκύπτει ότι
ΑΜ = ΜΓ.



5. Προεκτείνουμε την ΒΕ που τέμνει την ΑΓ στο Ζ.

Τότε το τριγ. $\overset{\triangle}{\text{ΑΒΖ}}$ είναι ισοσκελές (ΑΕ διχοτόμος και ύψος), οπότε ΑΒ = ΑΖ (1) και Ε μέσο του ΒΖ (2).
Άρα:



i) $\overset{\triangle}{\text{ΒΖΓ}}$ (Ε μέσο ΒΖ, Μ μέσο ΒΓ):

ΕΜ //= $\frac{\text{ΖΓ}}{2}$ (3).

Επομένως ΕΜ//ΑΓ.

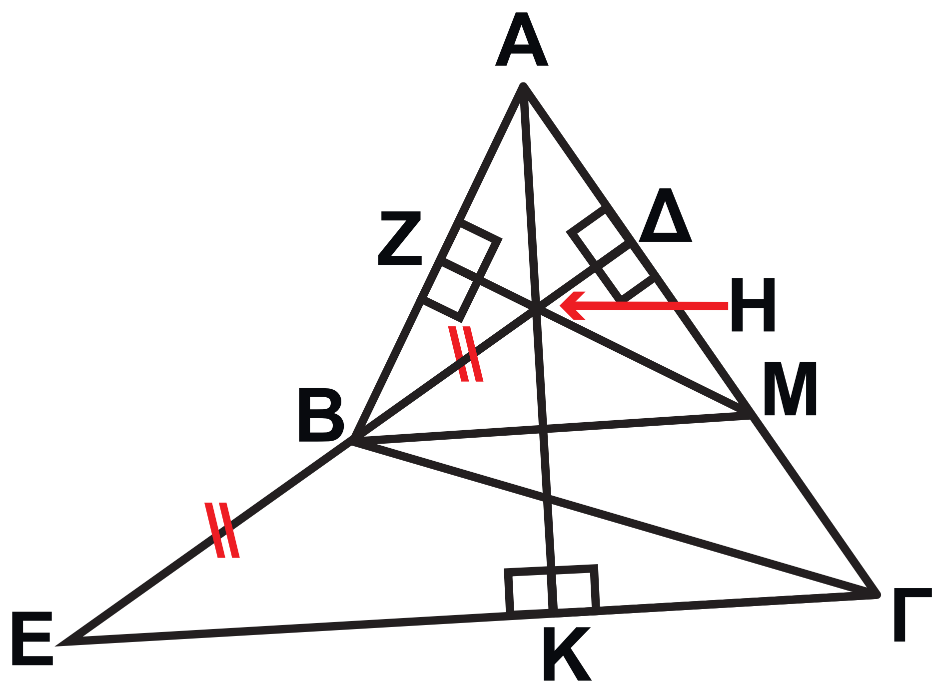
ii) $\text{ΕΜ} = \frac{\text{ΖΓ}}{2} = \frac{\text{ΑΓ} - \text{ΑΖ}}{2} = \frac{\text{ΑΓ} - \text{ΑΒ}}{2}$.

iii) $\text{Δ}\hat{\text{Ε}}\text{Μ} = \hat{\text{Α}}_2 = \frac{\hat{\text{Α}}}{2}$, αφού ΕΜ//ΑΓ.

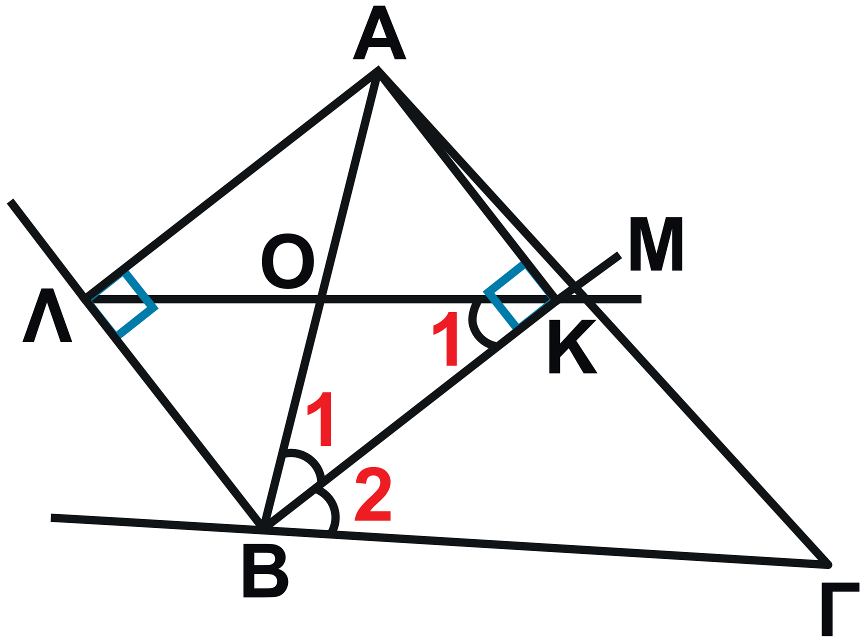
6. Έστω $MZ \perp AB$ που τέμνει την $B\Delta$ στο M. Αρκεί $AH \perp \Gamma E$.

Στο τριγ. $\overset{\triangle}{ABM}$ το H είναι το ορθόκεντρο, οπότε $AH \perp BM$ (1). Επίσης στο τριγ. $\overset{\triangle}{\Delta E\Gamma}$ τα B και M είναι μέσα των ΔE και $\Delta\Gamma$, οπότε $BM // \Gamma E$ (2).

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι $AH \perp \Gamma E$.

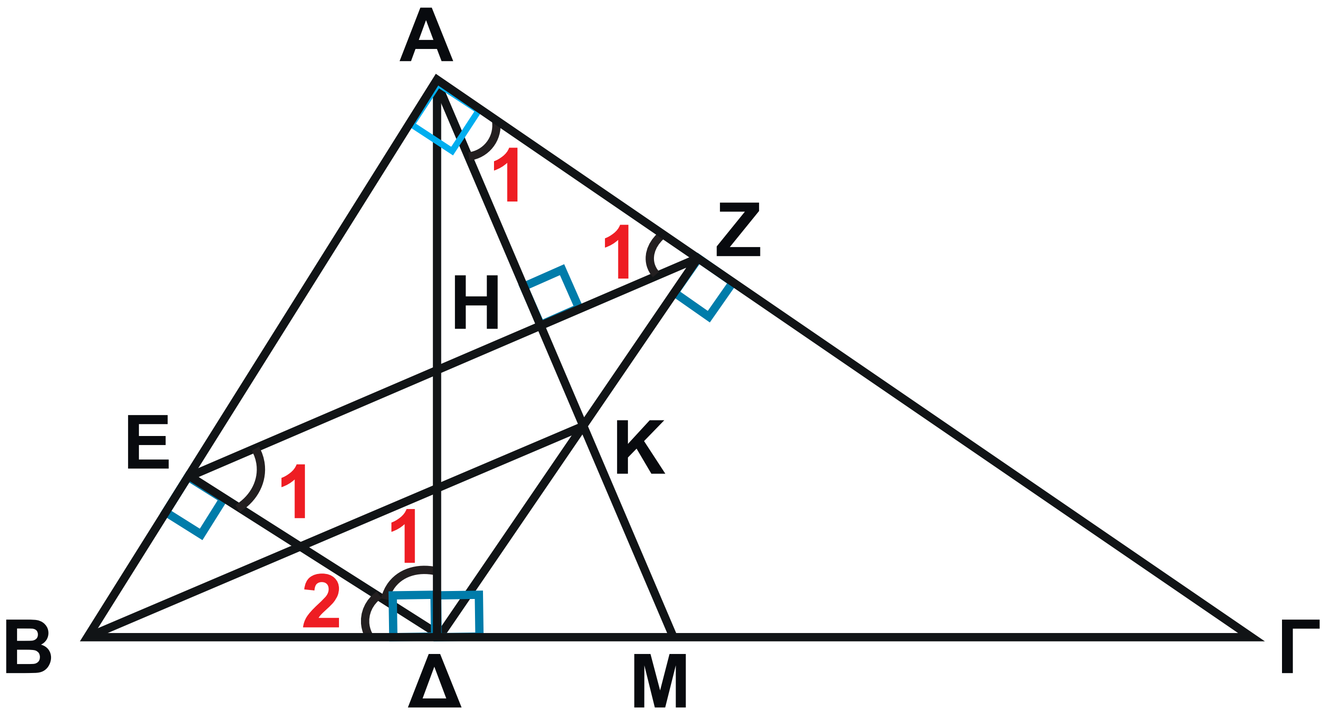


7. i) Έχουμε $\hat{K} = \hat{\Lambda} = 90^\circ$ και $K\hat{B}\Lambda = 90^\circ$ (διχοτόμοι εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών).
Άρα το ΑΚΒΛ είναι ορθογώνιο.



ii) Επειδή ΑΚΒΛ ορθογώνιο είναι:
Ο μέσο ΑΒ και $\hat{K}_1 = \hat{B}_1 - \hat{B}_2$, οπότε ΟΚ//ΒΓ. Επομένως στο τριγ. $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ έχουμε Ο μέσο ΑΒ, ΟΚ//ΒΓ. Άρα Μ μέσο ΑΓ.

8. i) $\hat{A} = \hat{E} = \hat{Z} = 90^\circ$.
Άρα το ΑΕΔΖ είναι ορθογώνιο, οπότε ΑΔ = ΕΖ.



ii) Επειδή ΑΕΔΖ ορθογώνιο έχουμε $\hat{Z}_1 = \hat{E}_1 = \hat{\Delta}_1$.
Αλλά $\hat{\Delta}_1 = \hat{B}$ (οξείες με κάθετες πλευρές), οπότε $\hat{Z}_1 = \hat{B}$ (1). Επίσης $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}$ (2) $\left(AM = \frac{B\Gamma}{2} = M\Gamma\right)$.
Από (1), (2) προκύπτει ότι

$\hat{A}_1 + \hat{Z}_1 = \hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^\circ$.

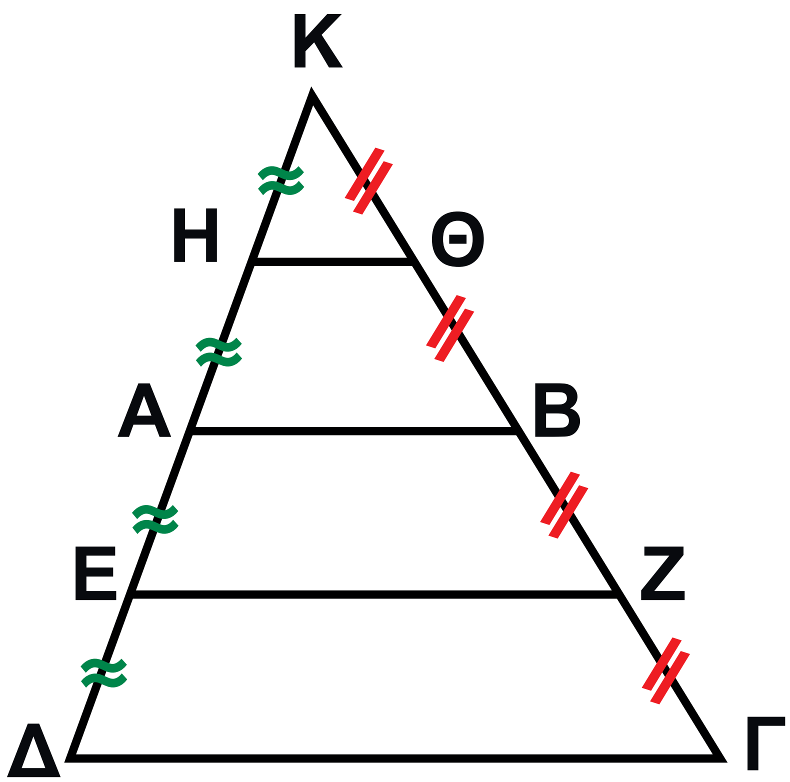
Άρα $\hat{H} = 90^\circ$, οπότε $AM \perp EZ$.

iii) Έστω Κ το σημείο τομής των ΑΜ και ΔΖ. Αρκεί ΒΚ//ΕΖ. Έχουμε ΒΕ//ΚΖ (ως κάθετες στην ΑΓ) και $\overset{\triangle}{AKZ} = \overset{\triangle}{BE\Delta}$ ($\hat{Z} = \hat{E} = 90^\circ$, $\Delta E = AZ$, $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma} = \hat{\Delta}_2$), οπότε ΒΕ = ΚΖ. Άρα ΚΖ//=ΒΕ, οπότε το ΒΕΖΚ είναι παραλληλόγραμμο και συνεπώς ΒΚ//ΕΖ.

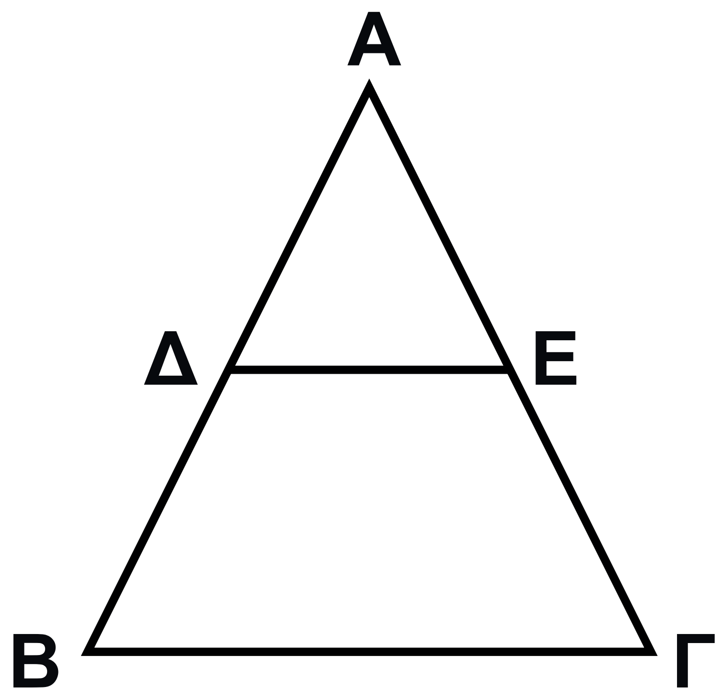
§ 5.10-5.11

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Έχουμε ΕΖ//ΑΒ (διάμεσος τραπεζίου) (1) και $\overset{\triangle}{\text{ΚΑΒ}}$: (Η, Θ μέσα ΚΑ, ΚΒ). Άρα ΗΘ//ΑΒ (2). Από (1), (2) προκύπτει ότι ΗΘ//ΑΒ//ΕΖ, οπότε το ΕΖΘΗ είναι τραπέζιο.



2. **Έχουμε $\overset{\triangle}{\text{ΑΒΓ}}$: (Δ, Ε μέσα ΑΒ, ΑΓ). Άρα ΔΕ//ΒΓ (1) και $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ (2) (ΑΒ = ΑΓ). Από τις (1), (2) προκύπτει ότι το ΔΕΓΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο.**



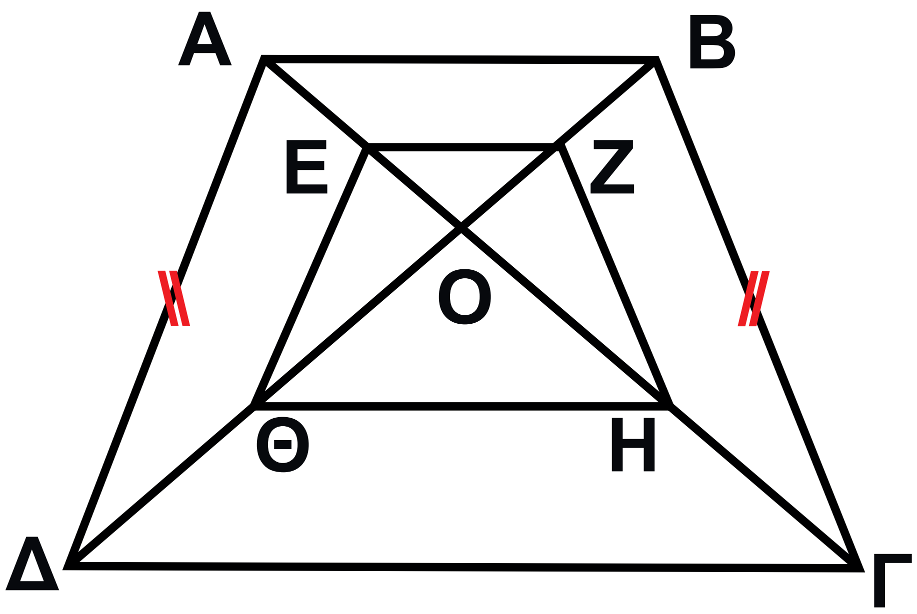
3. Έχουμε $\overset{\triangle}{OAB}$: (Ε, Ζ μέσα ΟΑ, ΟΒ).

Άρα ΕΖ//ΑΒ (1) $\overset{\triangle}{O\Delta\Gamma}$: (Θ, Η μέσα ΟΔ, ΟΓ).

Άρα ΘΗ//ΔΓ (2). Επειδή ΑΒΓΔ ισοσκελές τραπέζιο είναι ΑΓ = ΒΔ,

οπότε $\frac{A\Gamma}{2} = \frac{B\Delta}{2} \Leftrightarrow EH = \Theta Z$ (3)

Από τις (1), (2), (3) προκύπτει ότι το ΕΖΗΘ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

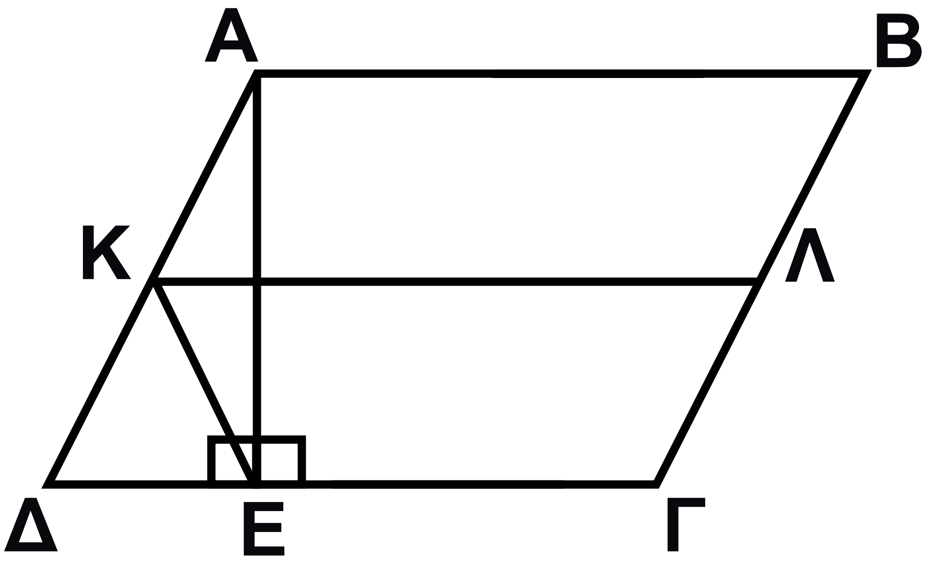


4. Έχουμε ΚΛ//ΑΒ//ΓΔ. Άρα ΚΛ//ΕΓ.

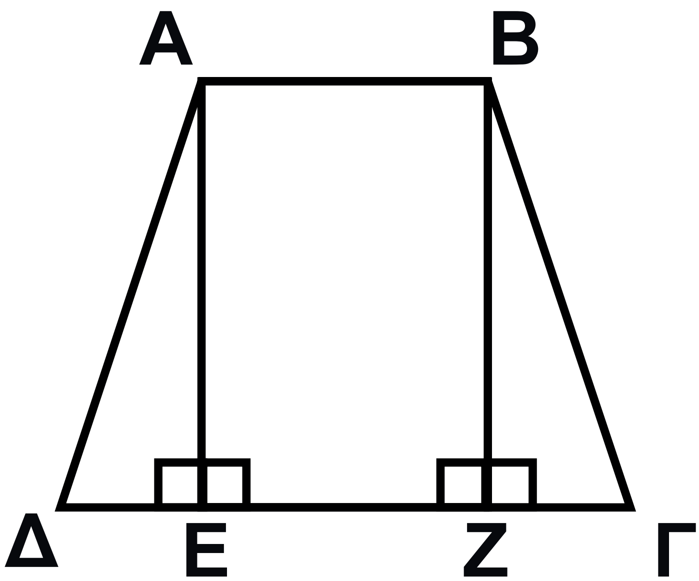
Επίσης $\overset{\triangle}{\text{ΑΕΔ}}$ ($\hat{\text{Ε}} = 90^\circ$ ΕΚ διάμεσος).

Άρα $\text{ΕΚ} = \dfrac{\text{ΑΔ}}{2} = \dfrac{\text{ΒΓ}}{2} = \text{ΛΓ}$.

Επομένως το ΚΛΓΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

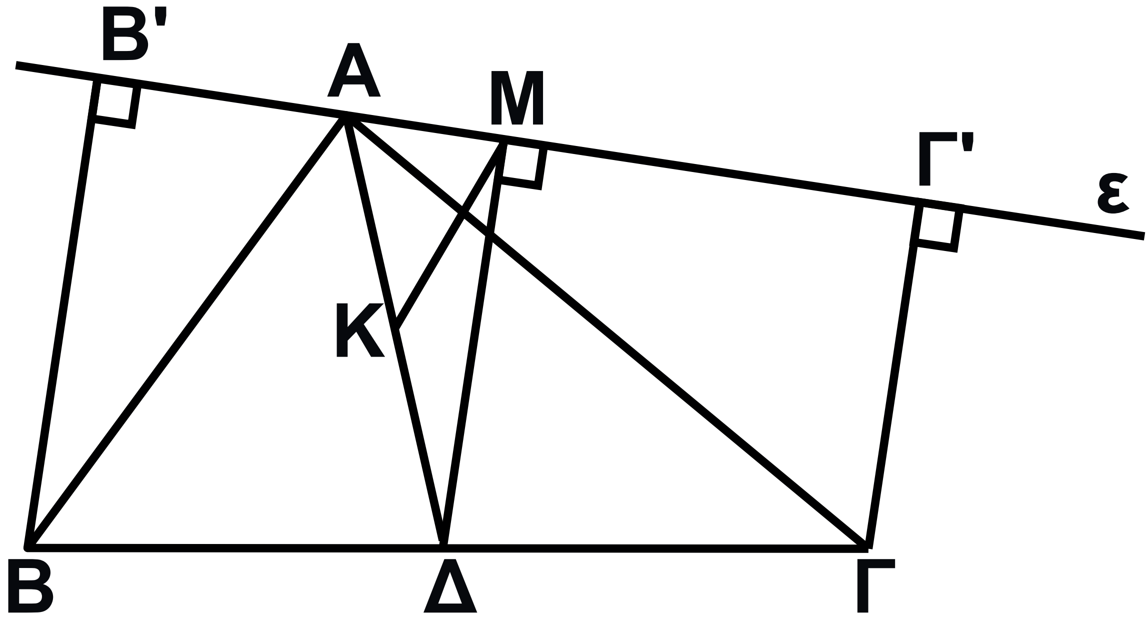


5. Έχουμε $\overset{\triangle}{\text{ΑΔΕ}} = \overset{\triangle}{\text{ΒΖΓ}}$ ($\hat{\text{Ε}} = \hat{\text{Ζ}} = 90^\circ$, ΑΕ = ΒΖ, ΑΔ = ΒΓ).
Άρα ΔΕ = ΓΖ (1)
Επίσης ΓΔ = ΔΕ + ΕΖ + ΖΓ = 2ΔΕ + + ΕΖ = 2ΔΕ + ΑΒ.
Άρα $\text{ΔΕ} = \text{ΓΖ} = \dfrac{\text{ΓΔ} - \text{ΑΒ}}{2}$.



6. Το τετράπλευρο ΒΒ΄Γ΄Γ είναι τραπέζιο, αφού ΒΒ΄//ΓΓ΄, ως κάθετες στην ε. Η ΜΔ είναι διάμεσος του

τραπεζίου, οπότε ΜΔ//ΒΒ′//ΓΓ′. Άρα ΔΜ ⊥ ε. Επομένως η ΜΚ εί-ναι διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου $\overset{\triangle}{AM\Delta}$, οπότε $MK = \dfrac{A\Delta}{2}$.

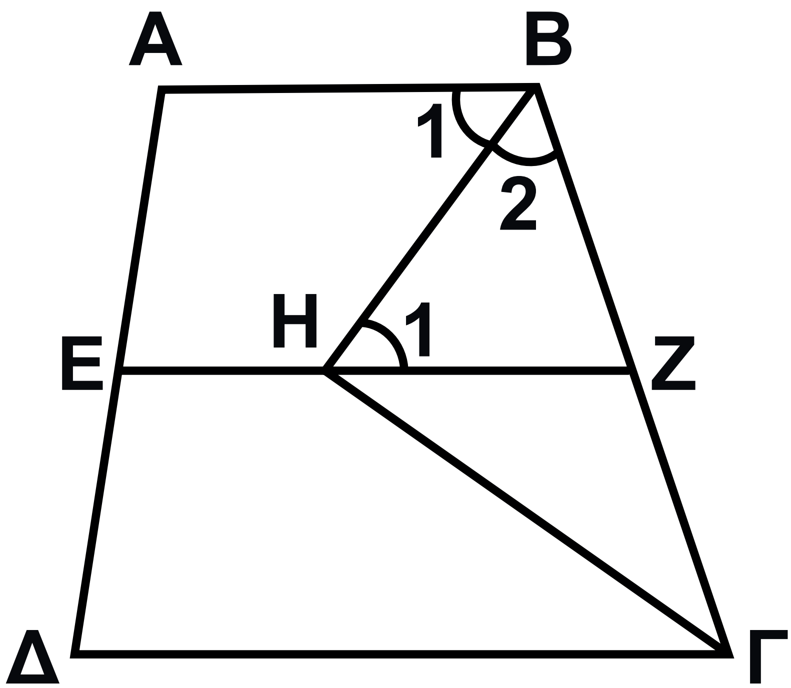


Αποδεικτικές Ασκήσεις

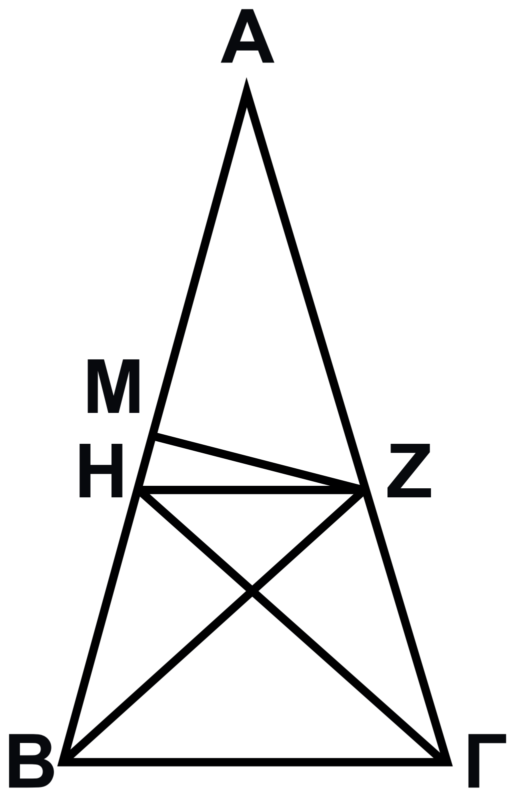
1. Έχουμε: $\left.\begin{array}{l} AB//EZ,\ \text{οπότε}\ \hat{B}_1 = \hat{H}_1 \\ \text{Αλλά}\quad \hat{B}_1 = \hat{B}_2 \end{array}\right\}$

$\left.\right\}$ Άρα $\hat{H}_1 = \hat{B}_2$, οπότε:

$HZ = BZ = Z\Gamma = \dfrac{B\Gamma}{2}$. Άρα $B\hat{H}\Gamma = 90^\circ$.



2. **Επειδή ΖΗ//ΒΓ και $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ το ΖΗΒΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο, οπότε ΓΗ = ΒΖ.**
Αλλά ΒΖ = ΑΖ (ΖΜ μεσοκάθετος ΑΒ). Άρα ΓΗ = ΑΖ.



3. Φέρουμε $BE' \perp \Delta\Gamma$. Τότε στο τριγ. $\overset{\triangle}{BE'\Gamma}$ $(\hat{E}' = 90^\circ, \hat{\Gamma} = 60^\circ, \hat{B} = 30^\circ)$.

Άρα $E'\Gamma = \dfrac{B\Gamma}{2} = \dfrac{\alpha}{2}$.

Επομένως

$\Delta\Gamma = \Delta E' + E'\Gamma = AB + E'\Gamma =$

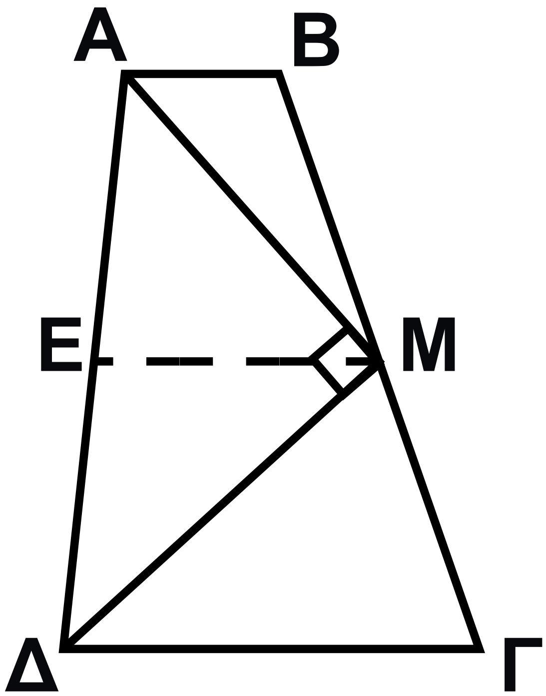
$= 2\alpha + \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{5\alpha}{2}$.

Άρα $EZ = \dfrac{AB + \Gamma\Delta}{2} = \dfrac{2\alpha + \dfrac{5\alpha}{2}}{2} = \dfrac{9\alpha}{4}$.

4. Έστω Ε μέσο ΑΔ. Τότε

$$ME = \frac{AB + \Gamma\Delta}{2} = \frac{A\Delta}{2}, \text{ οπότε}$$

$A\hat{M}\Delta = 90^\circ$ (αφού ΜΕ διάμεσος στο τριγ. $\overset{\triangle}{AM\Delta}$).



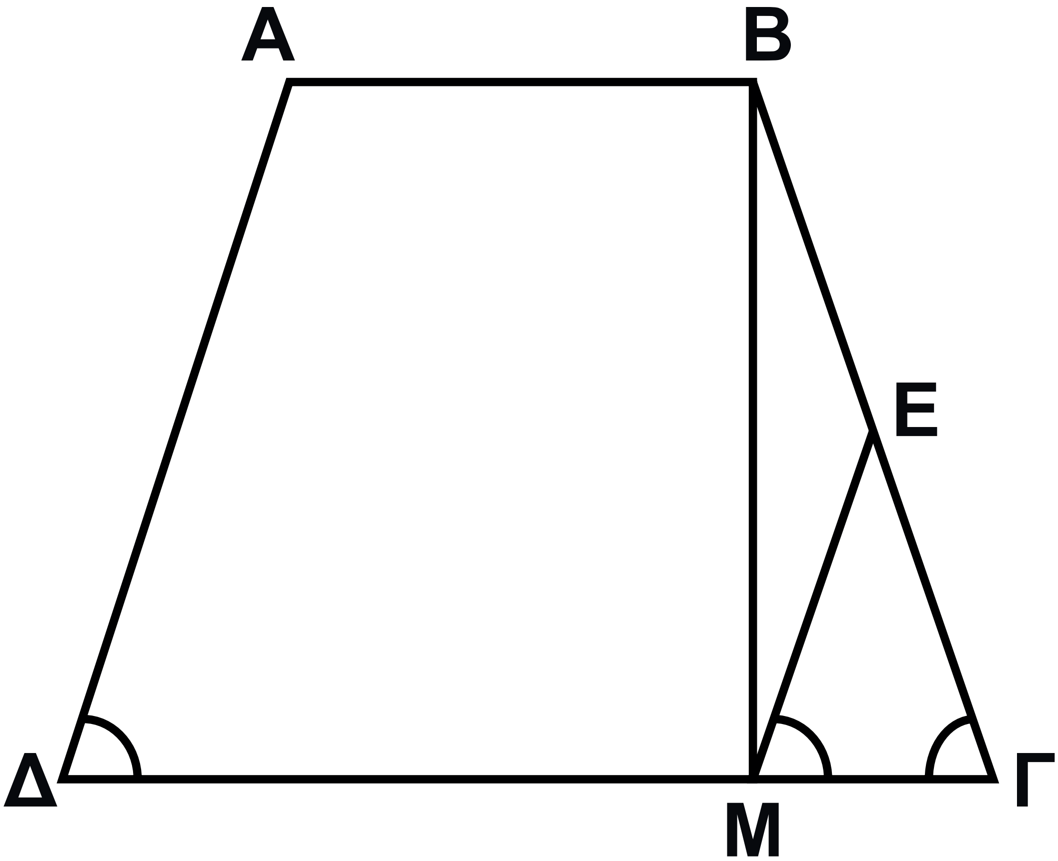
5. Έχουμε $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$ (ΑΒΓΔ ισοσκελές)

και $\hat{\Delta} = \hat{M}_1$ (ΑΔ//ΜΕ)

Άρα $\hat{M}_1 = \hat{\Gamma}$, οπότε

$$ME = E\Gamma = BE = \frac{B\Gamma}{2}.$$

Άρα $B\hat{M}\Gamma = 90^\circ$ ή $BM \perp \Delta\Gamma$.

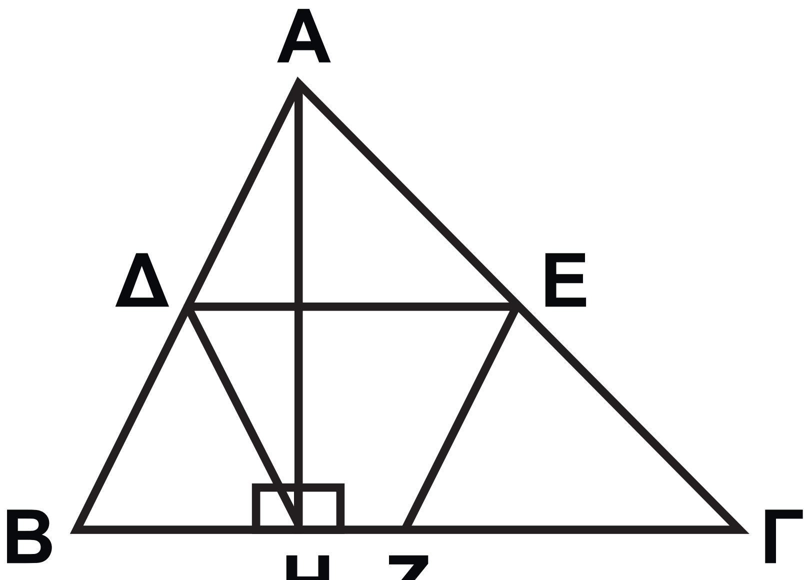


6. Έχουμε $\overset{\triangle}{\text{ΑΒΓ}}$ (Δ, Ε μέσα ΑΒ, ΑΓ). Άρα ΔΕ//ΒΓ, οπότε ΔΕ//ΗΖ (1)

Επίσης $\overset{\triangle}{\text{ΑΒΓ}}$ (Ε, Ζ μέσα ΑΓ, ΒΓ).

Άρα $\text{ΕΖ} = \dfrac{\text{ΑΒ}}{2}$ (2) και $\overset{\triangle}{\text{ΑΗΒ}}$ ($\hat{\text{Η}} = 90^\circ$, ΗΔ διάμεσος). Άρα $\text{ΗΔ} = \dfrac{\text{ΑΒ}}{2}$ (3).

Από τις (1), (2), (3) προκύπτει ότι το ΔΕΖΗ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



7. Έστω ΓΔ = 2ΑΒ. Έχουμε $\overset{\triangle}{\text{ΑΒΔ}}$ (Ε, Κ μέσα ΑΔ, ΔΒ).

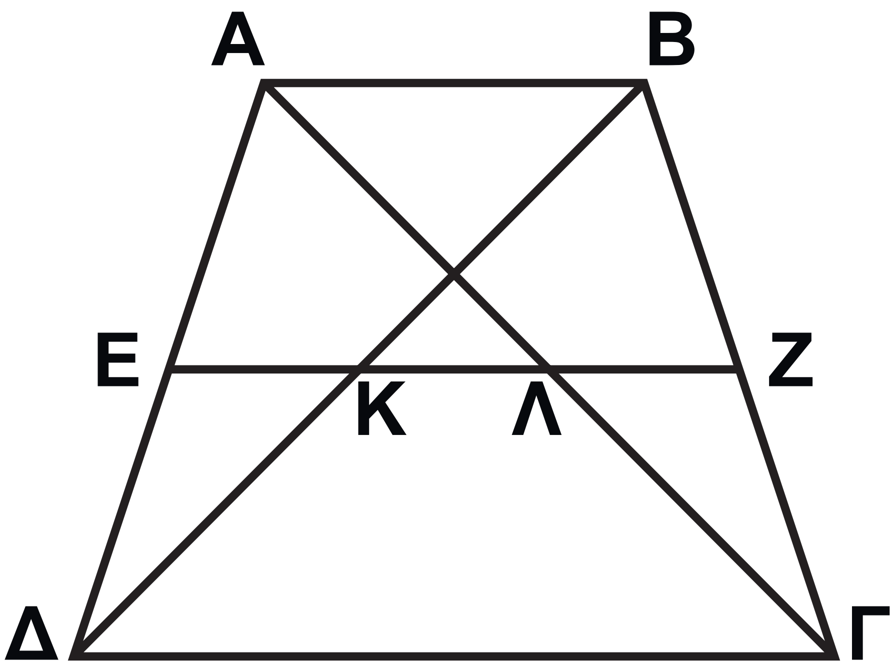
Άρα $\text{ΕΚ} = \frac{\text{ΑΒ}}{2}$ (1) και $\overset{\triangle}{\text{ΑΒΓ}}$ (Ζ, Λ μέσα ΒΓ, ΑΓ).

Άρα $\text{ΛΖ} = \frac{\text{ΑΒ}}{2}$ (2)

Επίσης

$$\text{ΚΛ} = \frac{\text{ΔΓ} - \text{ΑΒ}}{2} = \frac{2\,\text{ΑΒ} - \text{ΑΒ}}{2} = \frac{\text{ΑΒ}}{2} \quad (3)$$

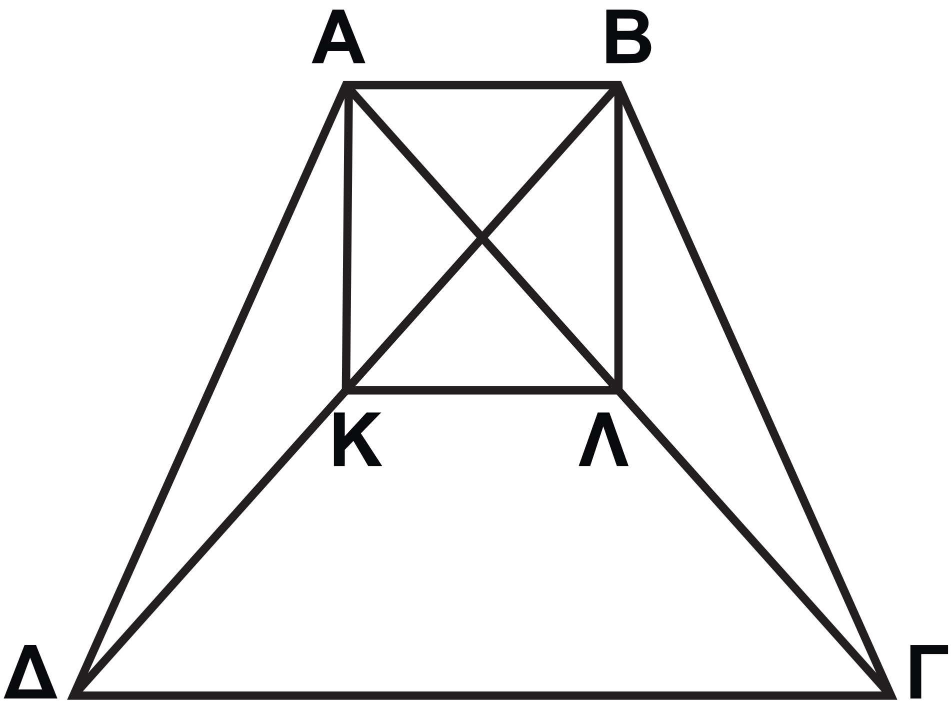
Από τις (1), (2), (3) προκύπτει ότι ΕΚ = ΚΛ = ΛΖ.



8. Έχουμε ΚΛ//ΔΓ//ΑΒ και

$$ΚΛ = \frac{ΔΓ - ΑΒ}{2} = \frac{3ΑΒ - ΑΒ}{2} = ΑΒ,$$

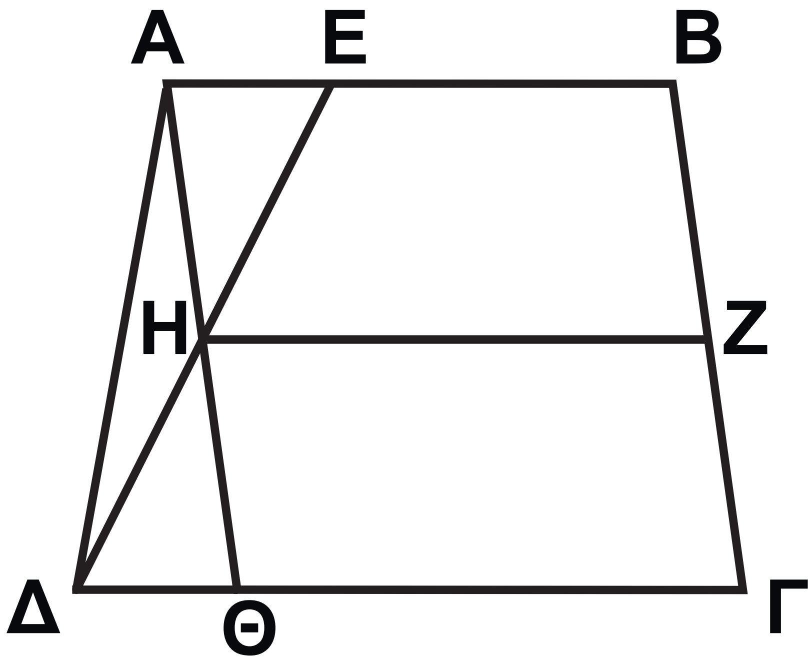
οπότε ΚΛ //= ΑΒ.
Άρα το ΑΚΛΒ είναι παραλληλόγραμμο. Αν το ΑΚΛΒ είναι ορθογώνιο, τότε ΒΚ = ΑΛ, οπότε ΒΔ = ΑΓ. Άρα το ΑΒΓΔ πρέπει να είναι ισοσκελές τραπέζιο.



9. Στο τραπέζιο ΕΒΓΔ η ΖΗ είναι διάμεσος, οπότε

$$ZH = \frac{EB + \Delta\Gamma}{2} = \frac{\frac{AB}{2} + \frac{3}{2}AB}{2} = AB.$$

Άρα ΗΖ //= ΑΒ, οπότε το ΑΒΖΗ είναι παραλληλόγραμμο.
Επίσης ΘΔ = ΔΓ − ΘΓ = ΔΓ − ΑΒ, αφού το ΑΒΓΘ είναι παραλληλόγραμμο.



10. Το ΑΓΓ'Α' είναι τραπέζιο με διάμεσο ΚΚ'.

Άρα $KK' = \dfrac{AA' + \Gamma\Gamma'}{2} \Leftrightarrow$

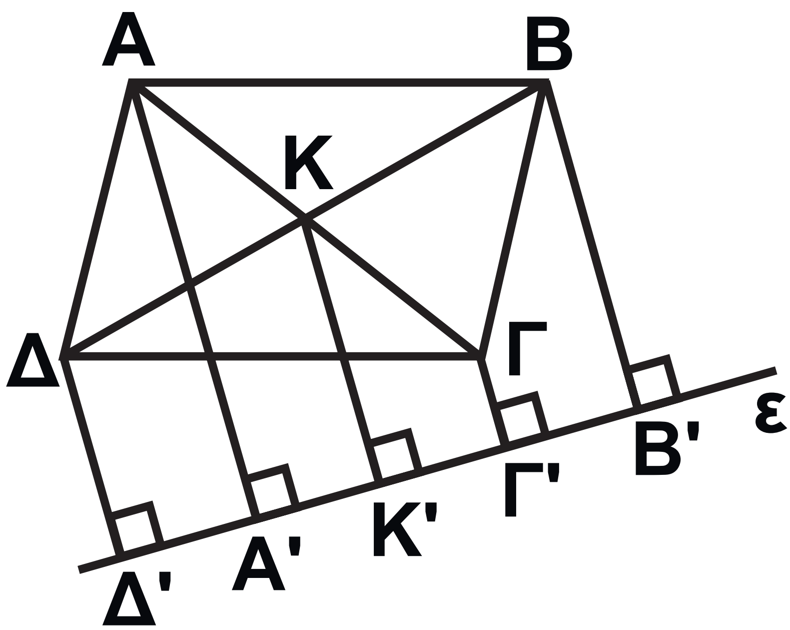
$\Leftrightarrow AA' + \Gamma\Gamma' = 2KK' \quad (1)$

Επίσης το ΒΒ'Δ'Δ είναι τραπέζιο με διάμεσο ΚΚ'.

Άρα $KK' = \dfrac{BB' + \Delta\Delta'}{2} \Leftrightarrow$

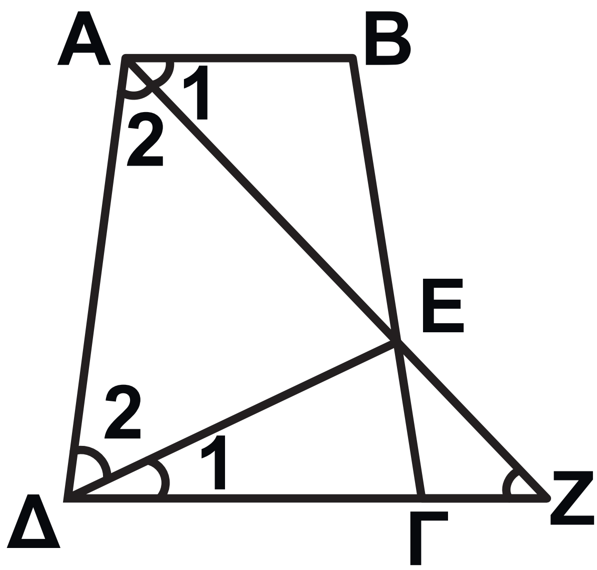
$\Leftrightarrow BB' + \Delta\Delta' = 2KK' \quad (2)$

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι $AA' + BB' + \Gamma\Gamma' + \Delta\Delta' = 4KK'$.



Σύνθετα Θέματα

1. Έστω ότι η διχοτόμος της $\hat{A}$ τέμνει την ΒΓ στο Ε.
Αρκεί ΔΕ διχοτόμος της $\hat{\Delta}$. Αν Ζ το σημείο τομής των ΑΕ, ΔΓ τότε $\hat{A}_1 = \hat{Z}$, οπότε $\hat{A}_2 = \hat{Z}$.
Άρα $ΑΔ = ΔΖ \Leftrightarrow ΑΔ = ΔΓ + ΓΖ \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow ΑΒ + ΓΔ = ΔΓ + ΓΖ \Leftrightarrow ΑΒ = ΓΖ$.
Επομένως το ΑΒΖΓ είναι παραλληλόγραμμο (ΑΒ //= ΓΖ).
Άρα Ε μέσο ΑΖ, οπότε η διάμεσος ΔΕ του ισοσκελούς τριγ. $\overset{\triangle}{ΑΔΖ}$ είναι και διχοτόμος της $\hat{\Delta}$.



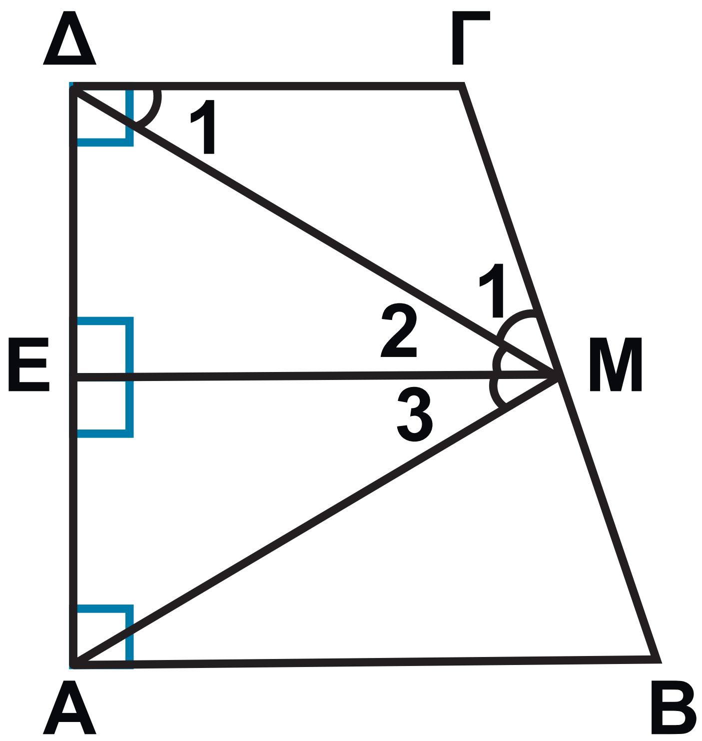
2. Φέρουμε $ME \perp A\Delta$, οπότε ME διάμεσος.

Τότε $\hat{M}_1 = \hat{\Delta}_1 \left(\Gamma M = \dfrac{B\Gamma}{2} = \Gamma\Delta\right)$

$\hat{M}_2 = \hat{\Delta}_1$ (εντός εναλλάξ)

$\hat{M}_3 = \hat{M}_2$ (ME ύψος και διάμεσος).

Άρα: $A\hat{M}\Gamma = 3\hat{M}_3 = 3M\hat{A}B$, αφού $\hat{M}_3 = M\hat{A}B$.



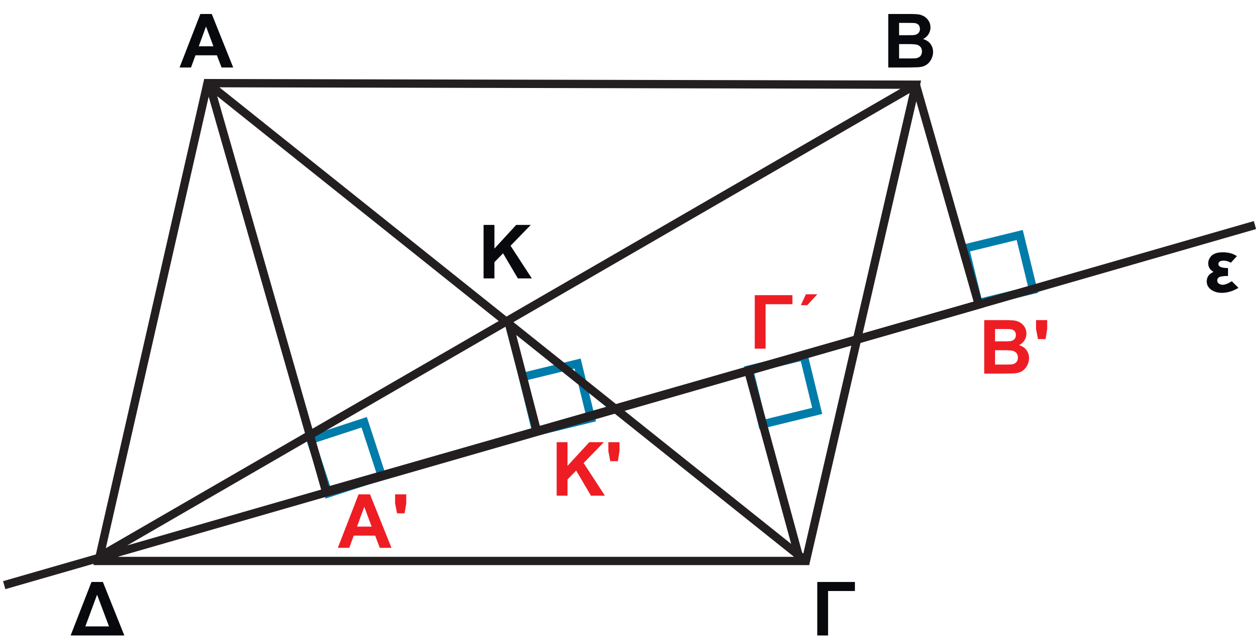
3. Έστω Κ το κέντρο του ΑΒΓΔ και ΚΚ′ ⊥ ε. Τότε το ΚΚ΄ ενώνει τα μέσα των διαγωνίων του τραπεζίου ΑΑ′ΓΓ′, οπότε

$$KK' = \frac{AA' - \Gamma\Gamma'}{2} \quad (1)$$

Επίσης στο τριγ. $\overset{\triangle}{\Delta B B'}$ είναι

$$KK' = \frac{BB'}{2} \quad (2)$$

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι ΑΑ′ − ΓΓ′ = ΒΒ′.



4. Έχουμε $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$: (Δ, Ε μέσα ΑΒ, ΒΓ).

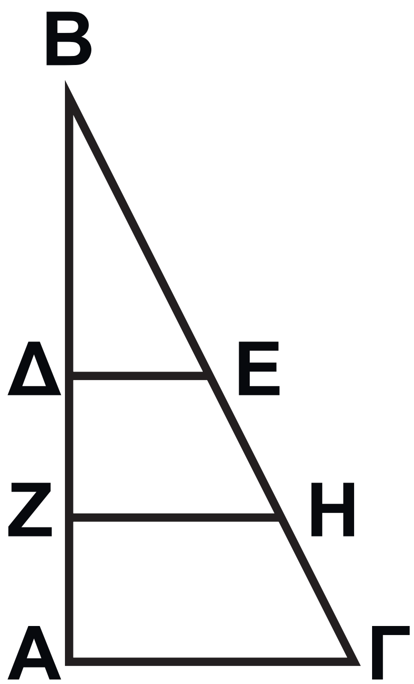
Άρα $ΔΕ \mathbin{//=} \dfrac{ΑΓ}{2}$ (1)

Επομένως το ΔΕΓΑ είναι τραπέζιο με διάμεσο τη ΖΗ.

Άρα: $ΖΗ = \dfrac{ΔΕ + ΑΓ}{2} \Leftrightarrow 2ΖΗ = \dfrac{3}{2}\ ΑΓ.$

Αλλά $ΖΗ = \dfrac{3}{8}ΒΓ$, οπότε $ΑΓ = \dfrac{ΒΓ}{2}$.

Άρα $\hat{Β} = 30^\circ$.



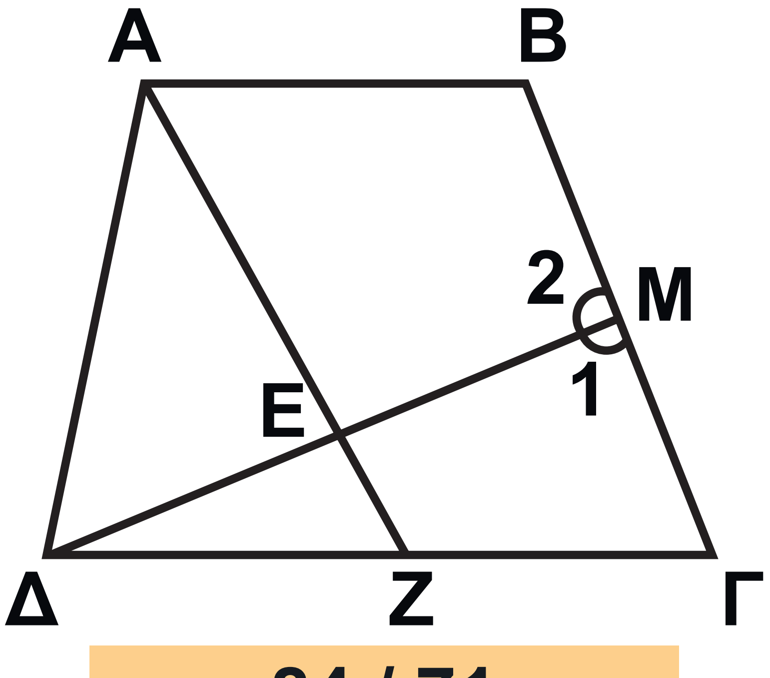
5. i) Επειδή ΔΜ = ΔΓ είναι $\hat{\Gamma} = \hat{M}_1$, οπότε $\hat{B} = \hat{M}_2$ (παραπληρωματικές ίσων γωνιών). Άρα το ΑΒΜΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο, οπότε ΑΜ = ΒΕ.

ii) Αν η ΑΕ τέμνει την ΔΓ στο Ζ τότε ΑΖ = ΒΓ (1) (αφού ΑΒΓΖ παραλληλόγραμμο) και

$$EZ = \frac{M\Gamma}{2} \Leftrightarrow EZ = \frac{B\Gamma}{4} \quad (2)$$

Άρα

$$AE = AZ - EZ = B\Gamma - \frac{B\Gamma}{4} = \frac{3}{4}B\Gamma.$$



Γενικές Ασκήσεις

1. Έστω ΑΒ < ΑΓ. Τότε:

$\overset{\triangle}{AB\Delta}$: ($\hat{\Delta} = 90^\circ$, $\hat{A} = 60^\circ$, $\hat{B} = 30^\circ$).

Άρα $A\Delta = \dfrac{AB}{2} < \dfrac{A\Gamma}{2}$ (1)

και $\overset{\triangle}{A\Gamma E}$: ($\hat{E} = 90^\circ$, $\hat{A} = 60^\circ$, $\hat{\Gamma} = 30^\circ$).

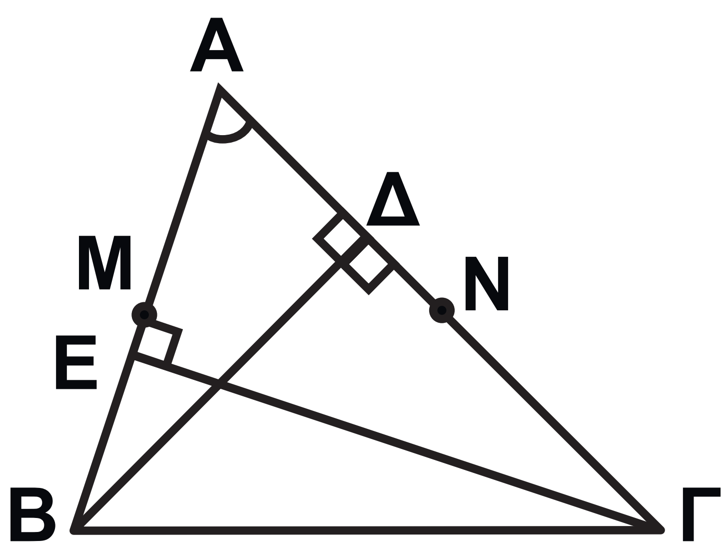
Άρα $AE = \dfrac{A\Gamma}{2} > \dfrac{AB}{2}$ (2).

Επομένως

$$ME = AE - AM = \frac{A\Gamma}{2} - \frac{AB}{2}$$

και $N\Delta = AN - A\Delta = \dfrac{A\Gamma}{2} - \dfrac{AB}{2}$.

Άρα ΜΕ = ΝΔ.



2. Έχουμε $E\hat{B}K = \hat{E}_1$ (1)

Έστω Μ το μέσο του ΔΕ.

Τότε: $AM = \dfrac{\Delta E}{2} = AB$.

Άρα $A\hat{B}M = \hat{M}_1$ (2)

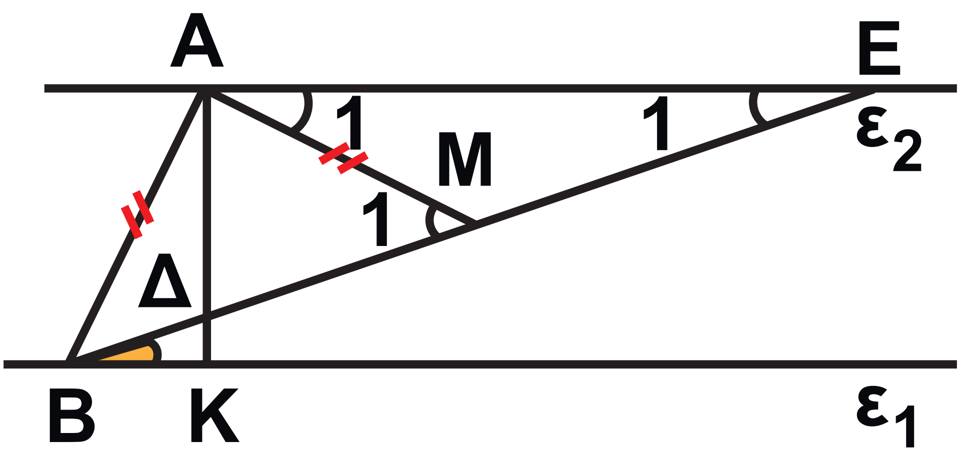
Αλλά $\hat{M}_1 = \hat{E}_1 + \hat{A}_1 = 2\hat{E}_1$

($AM = ME$) (3)

Από (1), (2), (3) προκύπτει ότι

$A\hat{B}M = 2E\hat{B}K$.

Άρα $A\hat{B}K = A\hat{B}M + E\hat{B}K = 3E\hat{B}K$.



3. α) Έχουμε $AB = AB'$ και

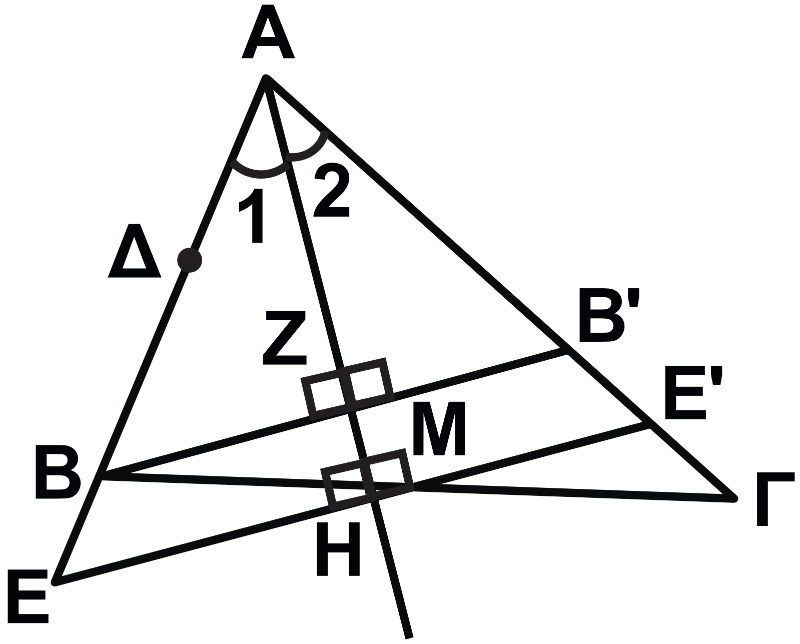
$AE = AE'$ (1) (γιατί τα τριγ. $\overset{\triangle}{ABB'}$

και $\overset{\triangle}{\text{ΑΕΕ}'}$ είναι ισοσκελή). Άρα:

$$B'E' = AE' - AB' = AE - AB =$$
$$= AΔ + ΔE - AB =$$
$$= \frac{AB}{2} + \frac{AΓ}{2} - AB = \frac{AΓ - AB}{2}.$$

β) Έχουμε: $ΓE' = AΓ - AE' =$
$$= AΓ - AE = AΓ - AΔ - ΔE =$$
$$= AΓ - \frac{AB}{2} - \frac{AΓ}{2} = \frac{AΓ - AB}{2}.$$

Άρα $B'E' = ΓE'$. Επομένως στο τριγ. $\overset{\triangle}{\text{ΓΒΒ}'}$ (E' μέσο $ΓB'$, $EE'//BB'$). Άρα M μέσο ΒΓ.



4. α) Επειδή ΗΒ// = ΖΓ και

$$HB = \frac{AB}{2} = B\Gamma$$ το ΗΒΓΖ είναι ρόμβος.

β) Έχουμε $\hat{Z}_1 = \hat{E}_1$ (1).

Επίσης στο τριγ. $\overset{\triangle}{A\hat{E}B}$ ($\hat{E} = 90^\circ$, ΕΗ διάμεσος).

Άρα $EH = \frac{AB}{2} = HZ$, οπότε

$\hat{Z}_1 = \hat{E}_2$ (2)

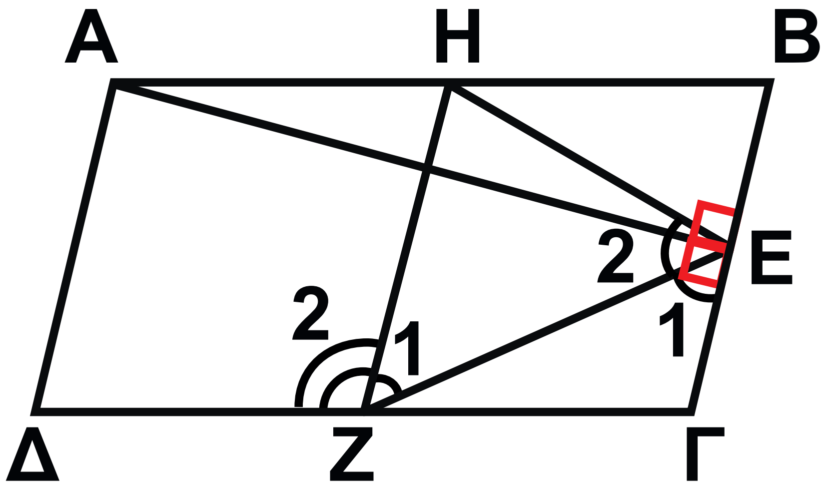
Από (1), (2) προκύπτει ότι ΖΕ διχοτόμος της $H\hat{E}\Gamma$.

γ) Επειδή ΕΓ//ΗΖ και $HE = \frac{AB}{2} = Z\Gamma$ το ΗΕΓΖ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

δ) Επειδή ΗΕΓΖ ισοσκελές τραπέζιο είναι $\hat{\Gamma} = H\hat{E}\Gamma = 2Z\hat{E}\Gamma$ (3)

Επίσης $\hat{Z}_1 = Z\hat{E}\Gamma$ (4) και $\hat{Z}_2 = \hat{\Gamma}$ (5)

Από (3), (4), (5) προκύπτει ότι
$\Delta\hat{Z}E = \hat{Z}_2 + \hat{Z}_1 = 3Z\hat{E}\Gamma$.



5. Στο τραπέζιο ΑΓΓ'Α' η ΜΜ' είναι διάμεσος.

Άρα $MM' = \dfrac{AA' + \Gamma\Gamma'}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow AA' + \Gamma\Gamma' = 2MM'$ (1)

Έστω Δ το μέσο του ΒΚ.

Τότε ΒΔ = ΔΚ = ΚΜ.

Επομένως στο τραπέζιο ΒΚΚ'Β' η ΔΔ' είναι διάμεσος.

Άρα $ΔΔ' = \dfrac{BB' + KK'}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow BB' + KK' = 2ΔΔ' (2)$

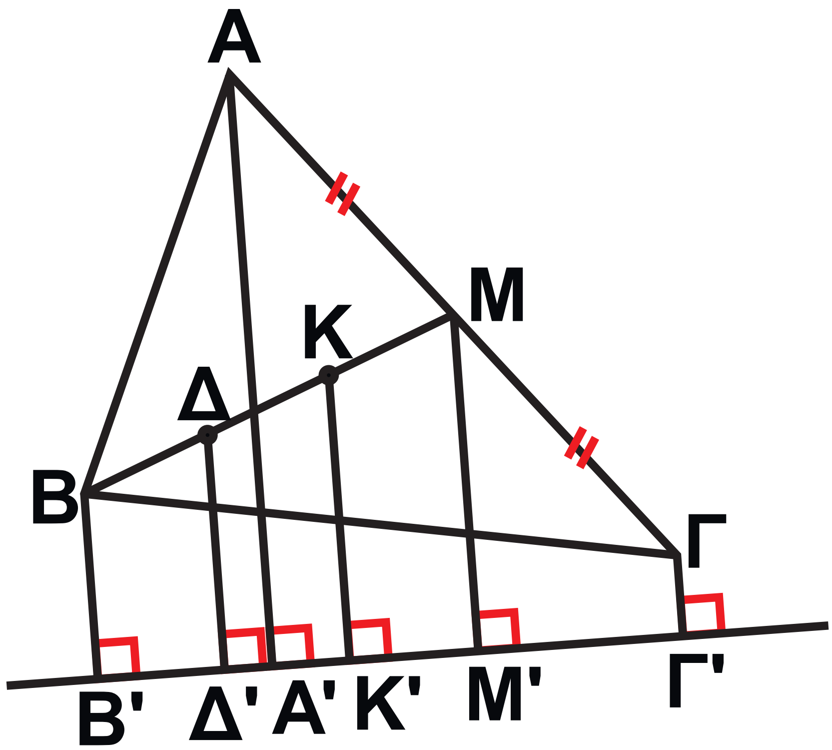
Επίσης στο τραπέζιο ΔΜΜ'Δ' η KK' είναι διάμεσος.

Άρα $KK' = \dfrac{MM' + ΔΔ'}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow MM' + ΔΔ' = 2KK' \Leftrightarrow$

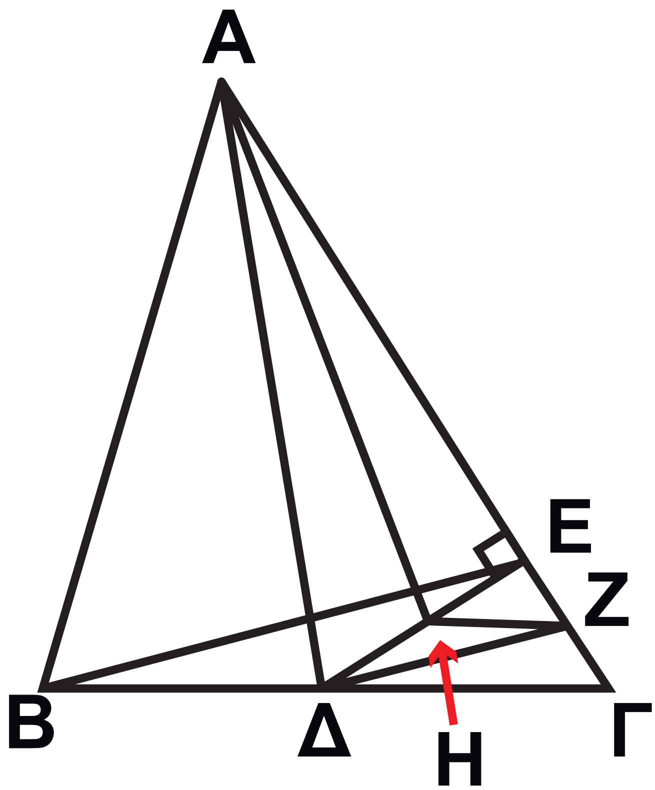
$\Leftrightarrow 2MM' + 2ΔΔ' = 4KK'$ (3)

Από τις (1), (2), (3) προκύπτει ότι $AA' + BB' + ΓΓ' = 3KK'$.



6. α) Έχουμε $\overset{\triangle}{ΒΕΓ}$ (Δ, Ζ μέσα ΒΓ, ΕΓ). Άρα ΔΖ//ΒΕ

β) $\overset{\triangle}{ΔΕΓ}$ (Ζ, Η μέσα ΕΓ, ΔΕ).
Άρα ΖΗ//ΔΓ, οπότε
ΖΗ ⊥ ΑΔ (αφού ΑΔ ⊥ ΔΓ).
Επομένως το Η είναι το ορθόκεντρο του τριγ. $\overset{\triangle}{ΑΔΖ}$.
Άρα ΑΗ ⊥ ΔΖ, οπότε ΑΗ ⊥ ΒΕ (αφού ΒΕ//ΔΖ).

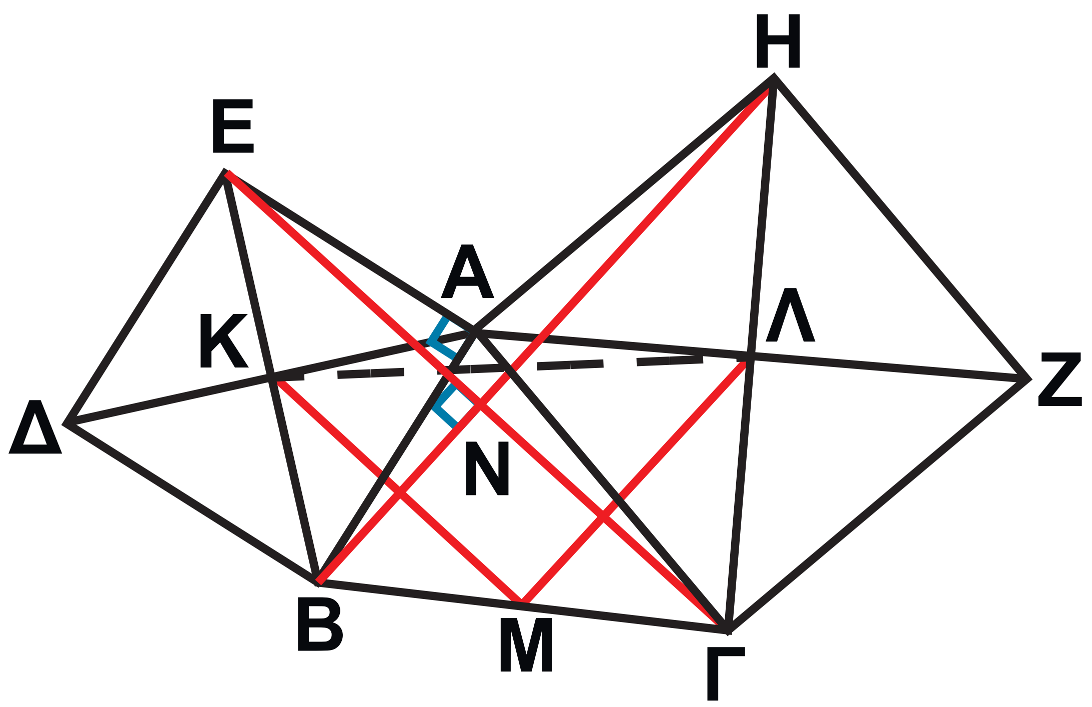


7. Έχουμε $\overset{\triangle}{AB H} = \overset{\triangle}{A\Gamma E}$ $(AB = AE,$
$A\Gamma = AH$, $E\hat{A}\Gamma = B\hat{A}H = 90^\circ + \hat{A})$.
Άρα $E\Gamma = BH$ (1) και $\hat{E}_1 = \hat{B}_1$, οπότε
$\hat{N} = E\hat{A}B = 90^\circ$.
Άρα $E\Gamma \perp BH$ (2)

Αλλά $KM \mathbin{/\!/}= \dfrac{E\Gamma}{2}$ (3) (τριγ. $\overset{\triangle}{EB\Gamma}$)

και $M\Lambda \mathbin{/\!/}= \dfrac{BH}{2}$ (4) (τριγ. $\overset{\triangle}{H\Gamma B}$).

Από τις (1), (2), (3), (4) προκύπτει
ότι $KM \perp = M\Lambda$.

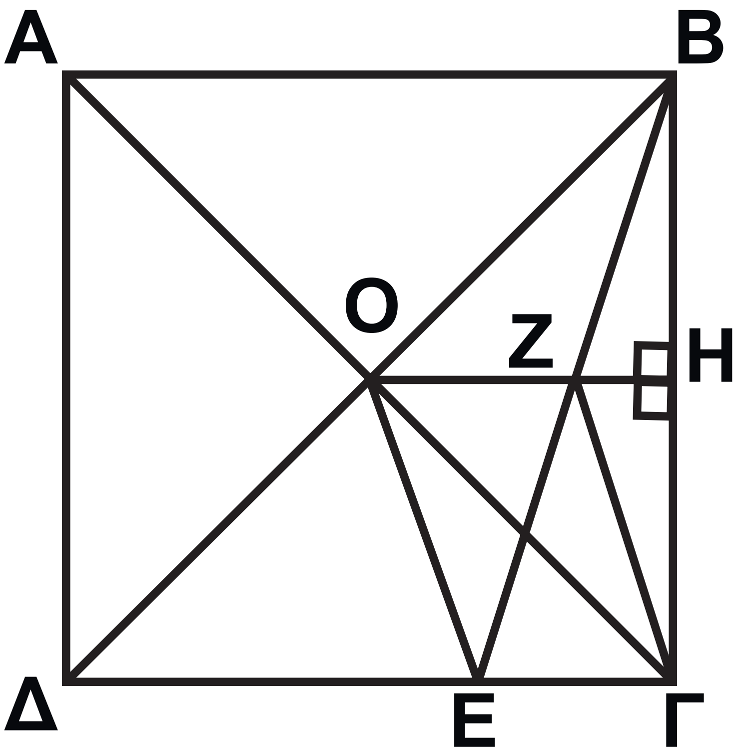


8. α) Έχουμε Μ μέσο ΟΓ, Η μέσο ΒΓ και $ΟΗ = \frac{α}{2}$. Στο τριγ. $\overset{\triangle}{ΒΟΓ}$ το Ζ είναι το βαρύκεντρο, οπότε $ΟΖ = \frac{2}{3}ΟΗ = \frac{2}{3}\,\frac{α}{2} = \frac{α}{3}$.

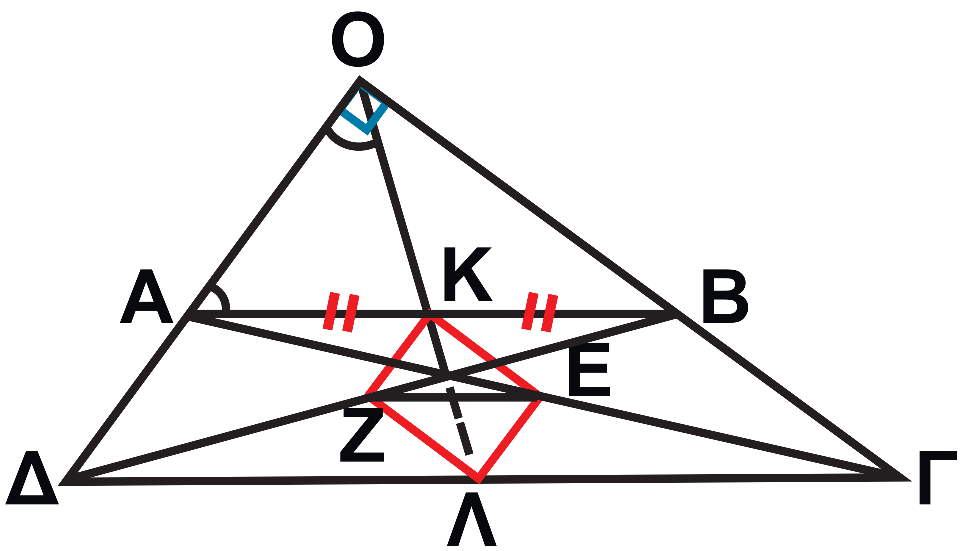
β) Είναι $ΖΗ \,//\!= \frac{ΕΓ}{2}$ (τριγ. $\overset{\triangle}{ΒΕΓ}$) και

$ΖΗ = \frac{ΟΖ}{2}$ (Ζ βαρυκ.).

Άρα ΟΖ //= ΕΓ, οπότε το ΟΖΓΕ είναι παραλληλόγραμμο.



9. i) Έστω Κ μέσο ΑΒ και Λ το σημείο τομής των ΟΚ και ΔΓ.
Αρκεί Λ μέσο ΔΓ.
Έχουμε $O\hat{A}B$ ($\hat{O} = 90^\circ$, ΟΚ διάμεσος).
Άρα $\hat{O}_1 = \hat{A}_1$. Αλλά $\hat{A}_1 = \hat{\Delta}$, οπότε $\hat{O}_1 = \hat{\Delta}$ ή ΟΛ = ΔΛ. Όμοια ΟΛ = ΛΓ. Άρα το Λ είναι το μέσο του ΔΓ.



ii) $K\Lambda = O\Lambda - OK = \dfrac{\Delta\Gamma}{2} - \dfrac{AB}{2}$

$\left(\text{αφού } OK = \dfrac{AB}{2},\ O\Lambda = \dfrac{\Delta\Gamma}{2}\right)$.

iii) Το ΚΕΛΖ είναι παραλληλόγραμμο γιατί $KZ \mathrel{/\!/}= \Lambda E \mathrel{/\!/}= \dfrac{A\Delta}{2}$ (από το τριγ. $A\overset{\triangle}{B}\Gamma$ και $A\overset{\triangle}{\Gamma}\Delta$).

Επειδή $ZE = \dfrac{\Delta\Gamma - AB}{2} = K\Lambda$, το ΚΕΛΖ είναι ορθογώνιο.

10. Φέρουμε:

$\left.\begin{array}{l} \Delta\Delta_1 \perp B\Gamma \\ \Delta\Delta_2 \perp AB \end{array}\right\}$ οπότε $\Delta\Delta_1 = \Delta\Delta_2$ (1) και

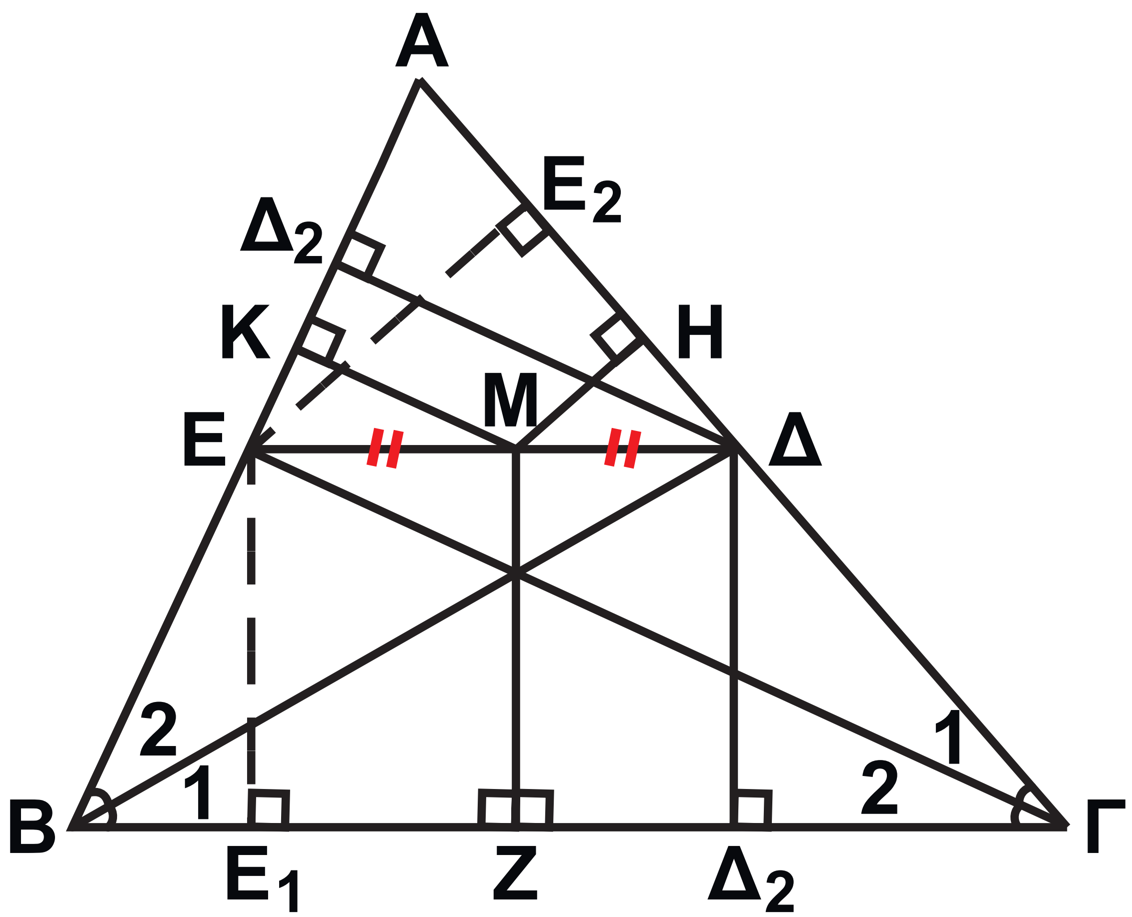
$\left.\begin{array}{l} EE_1 \perp B\Gamma \\ EE_2 \perp A\Gamma \end{array}\right\}$ οπότε $EE_1 = EE_2$ (2)

Στο τραπέζιο $ΔΕΕ_1Δ_1$ η ΜΖ είναι διάμεσος, οπότε

$$MZ = \frac{ΔΔ_1 + ΕΕ_1}{2} \overset{(1),(2)}{=} \frac{ΔΔ_2 + ΕΕ_2}{2} =$$

$$= \frac{ΔΔ_2}{2} + \frac{ΕΕ_2}{2} = MK + MH$$

(στα τρίγωνα $\overset{\triangle}{ΔΕΔ_2}$ και $\overset{\triangle}{ΔΕΕ_2}$ αφού Μ μέσο ΔΕ).



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

- **Αν μας ενδιαφέρει γωνία που σχετίζεται με δυο εφαπτόμενους κύκλους, συνήθως φέρουμε την κοινή εφαπτομένη (εσωτερική ή εξωτερική).**
  (**Ασκήσεις:** § 6.4 Σύνθετα 1, 2)

- **Όμοια, στους τεμνόμενους κύκλους, συνήθως φέρουμε την κοινή χορδή.**
  (Ασκήσεις: § 6.6 Αποδεικτικές 1)

- **Για να διέρχεται ένας κύκλος (Α, Β, Γ) από ένα σημείο Δ αρκεί τα Α, Β, Γ και Δ να είναι κορυφές εγγράψιμου τετραπλεύρου.**
  (Ασκήσεις: Γενικές 6, 8)

§ 6.1-6.4

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Για το 1ο σχήμα έχουμε:
$2x+3x+4x=360^\circ \Leftrightarrow 9x=360^\circ \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x=40^\circ$.
Η y είναι εγγεγραμμένη γωνία και βαίνει στο τόξο $\overset{\frown}{ΒΓ}=4x$, οπότε
$y=2x=2\cdot 40^\circ=80^\circ$.
Για το 2ο σχήμα έχουμε
$x=Α\hat{Β}Δ=50^\circ$, ως εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο. Για τον ίδιο λόγο $Δ\hat{Α}Γ=Δ\hat{Β}Γ=35^\circ$,
οπότε από το τρίγωνο $\overset{\triangle}{ΑΔΓ}$ βρίσκουμε: $y=180^\circ-x-35^\circ=105^\circ$.

2. Η γωνία $\hat{A}$ είναι γωνία τεμνουσών, οπότε (§ 6.3) έχουμε:

$$\hat{A} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{\Gamma\Delta} - \overset{\frown}{BE}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 40^\circ = \frac{1}{2}(200^\circ - \overset{\frown}{BE}) \Leftrightarrow \overset{\frown}{BE} = 120^\circ.$$

3. Για το 1ο σχήμα έχουμε: $x = \hat{A} = 40^\circ$, γιατί η x είναι γωνία χορδής και εφαπτομένης. Τότε $\overset{\frown}{B\Gamma} = 80^\circ$. Επειδή ΑΒ = ΑΓ θα είναι

$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A\Gamma} = y$, οπότε από την:

$2y + \overset{\frown}{B\Gamma} = 360^\circ \Leftrightarrow 2y + 80^\circ = 360^\circ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = 140^\circ$.

Για το 2ο σχήμα έχουμε: Η $\hat{A}$ είναι γωνία τέμνουσας και εφαπτομένης, επομένως σύμφωνα με την § 6.3 θα είναι:

$$\hat{A} = \frac{1}{2}(y - x) \Leftrightarrow y - x = 120^\circ (1).$$

Για τη γωνία $\hat{\Gamma}$ έχουμε:

$$\hat{\Gamma} = \Gamma\hat{B}\Delta = \frac{(\overset{\frown}{\Gamma\Delta})}{2} = \frac{1}{2}\ (360^\circ - x - y) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 50^\circ = \frac{1}{2}\ (360^\circ - x - y) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + y = 260^\circ (2)$$

Λύνοντας το σύστημα των (1) και (2) βρίσκουμε: $x = 70^\circ$, $y = 190^\circ$.

4. Από το σχήμα έχουμε:

$$\hat{K} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{\Delta\Gamma} + \overset{\frown}{BE}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 70^\circ = \frac{1}{2}\ (\overset{\frown}{\Delta\Gamma} + \overset{\frown}{BE}) \Leftrightarrow \overset{\frown}{\Delta\Gamma} + \overset{\frown}{BE} =$$

$$= 140^\circ (1).$$

Επίσης: $\hat{A} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{ΓΔ} - \overset{\frown}{BE}) \Leftrightarrow$

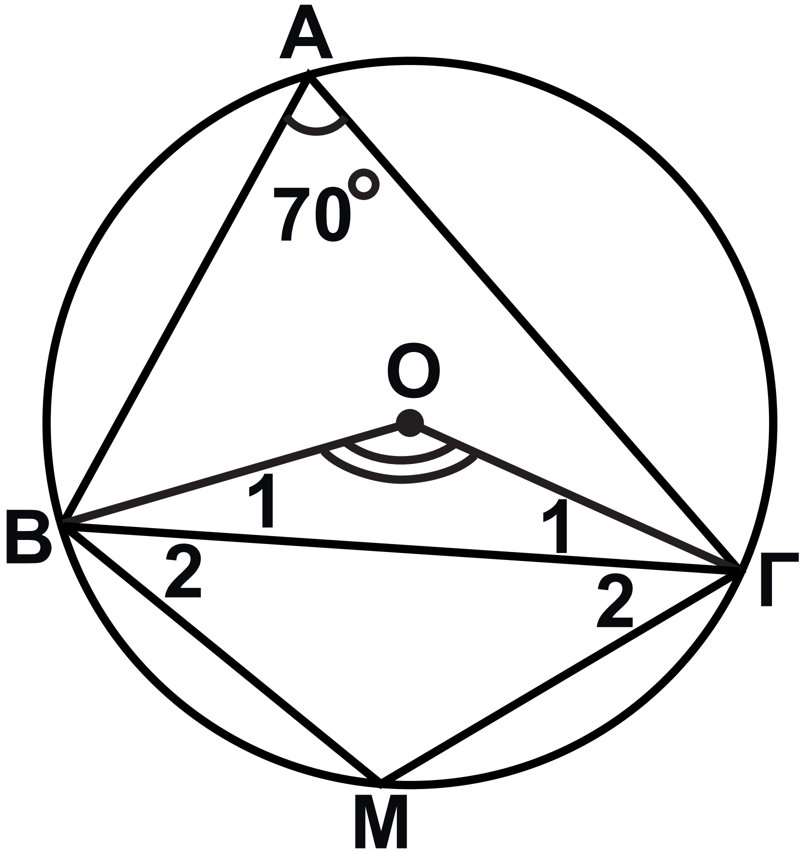
$\Leftrightarrow (\overset{\frown}{ΔΓ} - \overset{\frown}{BE}) = 50^\circ$ (2).

Λύνοντας το σύστημα των (1) και (2) βρίσκουμε: $\overset{\frown}{ΔΓ} = 95^\circ$, $\overset{\frown}{BE} = 45^\circ$.

5. Έχουμε: $\hat{A} = \frac{1}{2}\hat{O}$ ή $70^\circ = \frac{1}{2}\hat{O}$ ή $\hat{O} = 140^\circ$.

Επειδή ΟΒ = ΟΓ είναι $\hat{B}_1 = \hat{Γ}_1 = x$, οπότε $2x + \hat{O} = 180^\circ$ ή $x = 20^\circ$, δηλ. $\hat{B}_1 = \hat{Γ}_1 = 20^\circ$.

Επειδή $\hat{A} = 70^\circ$ θα είναι $\overset{\frown}{BMΓ} = 140^\circ$ και αφού Μ μέσο $\overset{\frown}{BM} = \overset{\frown}{MΓ} = 70^\circ$, οπότε $\hat{B}_2 = \hat{Γ}_2 = \frac{1}{2}70^\circ = 35^\circ$ και από το τρίγωνο $\overset{\triangle}{BMΓ}$ βρίσκουμε ότι $\hat{M} = 180^\circ - 2 \cdot 35^\circ = 110^\circ$.

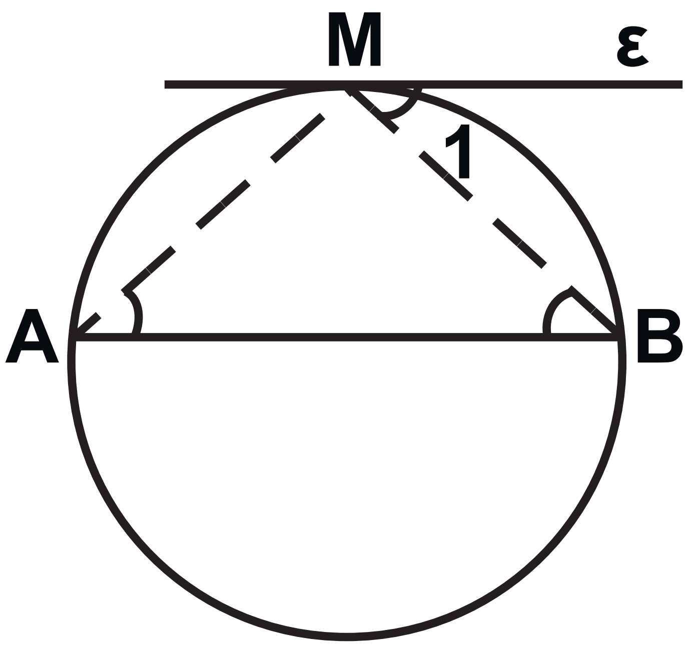


6. Από το σχήμα έχουμε y = 2z (y εξωτερική γωνία τριγώνου) και x = z, ως εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο. Με τη βοήθεια αυτών η i) είναι σωστή.

7. Τα ζητούμενα καθίσματα είναι αυτά που βρίσκονται πάνω στο τόξο που γράφεται με χορδή το τμήμα που εκφράζει το πλάτος της σκηνής και δέχεται γωνία ίση με τη γωνία υπό την οποία φαίνεται η σκηνή από το κάθισμα Α.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

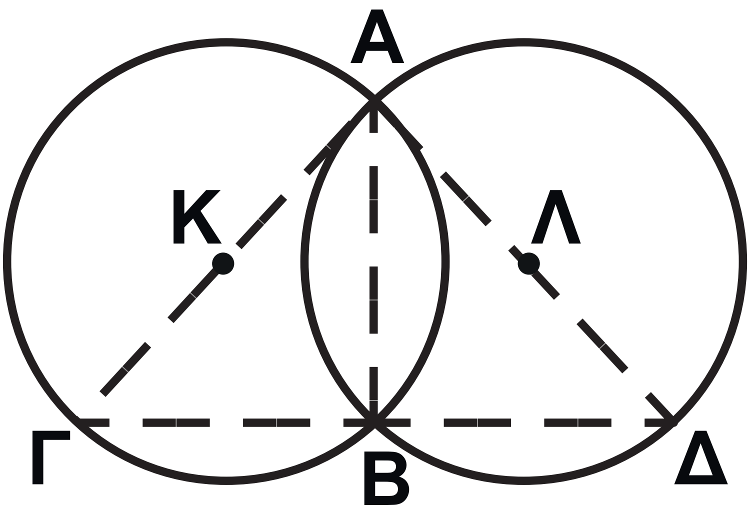
1. **Ευθύ:** Έστω Μ το μέσο ενός τόξου $\overset{\frown}{AB}$ και ε η εφαπτομένη του στο Μ. Θα δείξουμε ότι ε//ΑΒ. Έχουμε: η $\hat{M}_1$ είναι γωνία χορδής και εφαπτομένης, άρα: $\hat{A} = \hat{M}_1$ (1). Εξάλλου αφού Μ μέσο ΑΒ θα είναι $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MB}$, οπότε $\hat{A} = \hat{B}$ (2) ως εγγεγραμμένες που βαίνουν στα ίσα τόξα $\overset{\frown}{MB}$ και $\overset{\frown}{MA}$ αντίστοιχα. Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $\hat{B} = \hat{M}_1$ απ' όπου έχουμε ε//ΑΒ.



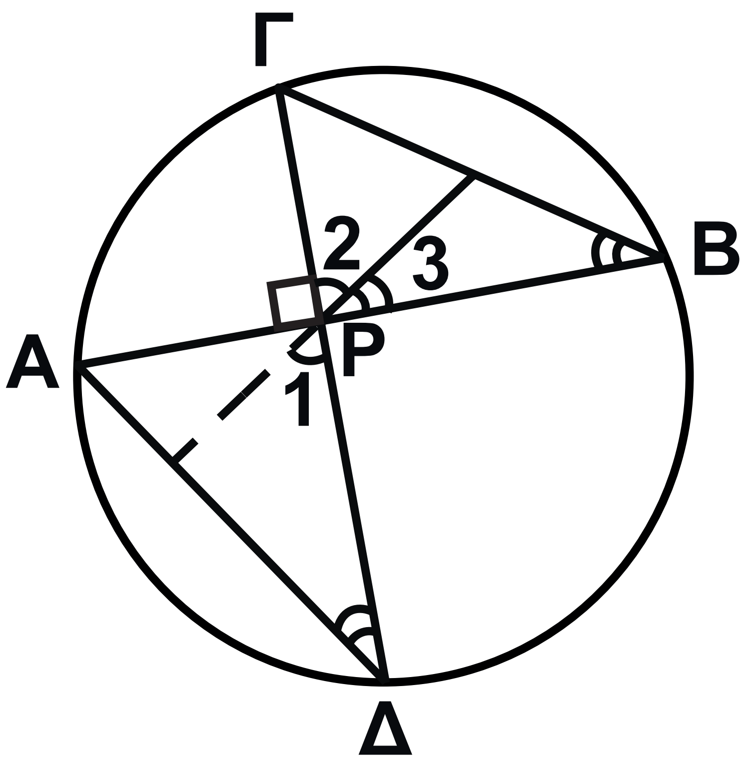
Αντίστροφο: Υποθέτουμε τώρα ότι ε//ΑΒ και θα δείξουμε ότι Μ μέσο $\overset{\frown}{AB}$. Έχουμε $\hat{A} = \hat{M}_1$ (3) (γωνία χορδής και εφαπτομένης) και $\hat{B} = \hat{M}_1$ (4) (γιατί ε//ΑΒ). Από (3), (4) προκύπτει ότι $\hat{A} = \hat{B}$, οπότε και τα αντίστοιχα τόξα αυτών $\overset{\frown}{MB}$, $\overset{\frown}{MA}$ είναι ίσα, δηλ. Μ μέσο του $\overset{\frown}{AB}$.

2. Επειδή Γ αντιδιαμετρικό του Α στον κύκλο κέντρου Κ, η γωνία $A\hat{B}\Gamma$ είναι ορθή γιατί βαίνει σε ημικύκλιο, δηλ. $A\hat{B}\Gamma = 90^\circ$ (1) όμοια $A\hat{B}\Delta = 90^\circ$ (2).

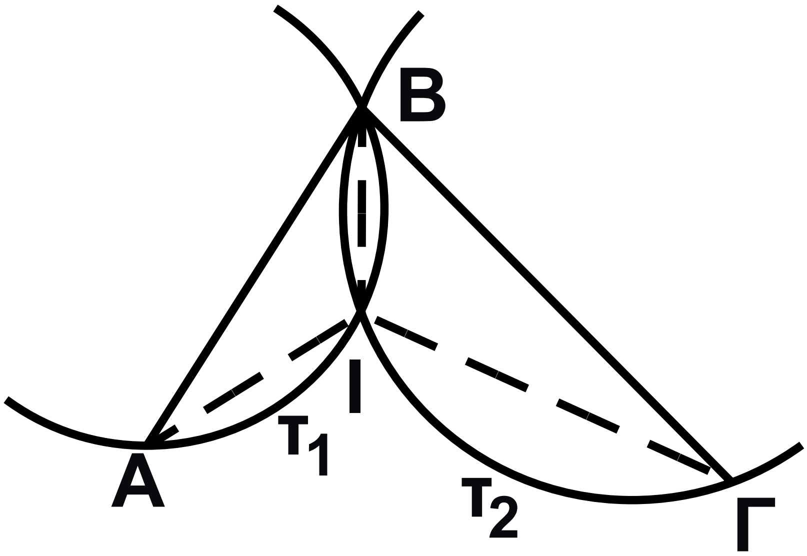
Από (1) και (2) προκύπτει ότι $A\hat{B}\Gamma + A\hat{B}\Delta = 180^\circ$ η οποία σημαίνει ότι Γ, Β, Δ συνευθειακά, δηλαδή η ΓΔ διέρχεται από το Β.



3. Αρκεί $\hat{P}_1 + \hat{\Delta} = 90^\circ$. Έχουμε:
$\hat{P}_1 = \hat{P}_2$ (ως κατακορυφήν)
$\hat{\Delta} = \hat{B}$ (εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο) και $\hat{B} = \hat{P}_3$ (γιατί το τρίγωνο $\overset{\triangle}{B\hat{P}\Gamma}$ είναι ορθογώνιο στο P και PM διάμεσος).
Άρα $\hat{P}_1 + \hat{\Delta} = \hat{P}_2 + \hat{P}_3 = B\hat{P}\Gamma = 90^\circ$, αφού οι χορδές AB και ΓΔ τέμνονται κάθετα.



4. Επειδή $A\hat{I}B = 100^\circ$ το Ι βρίσκεται σε τόξο $τ_1$ που γράφεται με χορδή ΑΒ και δέχεται γωνία 100°. Όμοια το Ι βρίσκεται και στο τόξο $τ_2$ που γράφεται με χορδή τη ΒΓ και δέχεται γωνία 125°. Τα τόξα αυτά έχουν κοινό το σημείο Β που δε βρίσκεται πάνω στη διάκεντρο των αντίστοιχων κύκλων, επομένως θα έχουν και δεύτερο κοινό σημείο Ι το οποίο είναι το ζητούμενο. Πράγματι $A\hat{I}B = 100^\circ$ από κατασκευή του $τ_1$ και
$B\hat{I}Γ = 125^\circ$ από κατασκευή του $τ_2$
και $A\hat{I}Γ = 360^\circ - 100^\circ - 125^\circ = 135^\circ$.

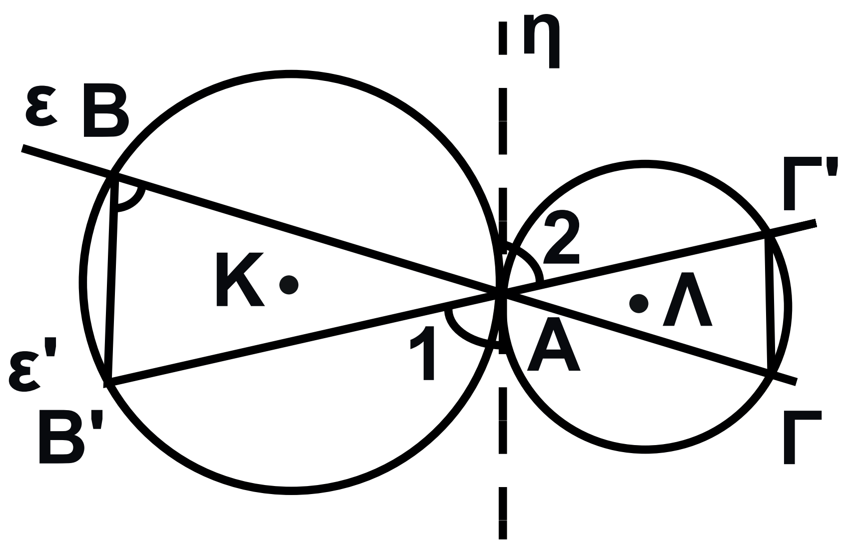


Σχόλιο:
Προφανώς ο καπετάνιος έκαμε και μια περιττή μέτρηση.

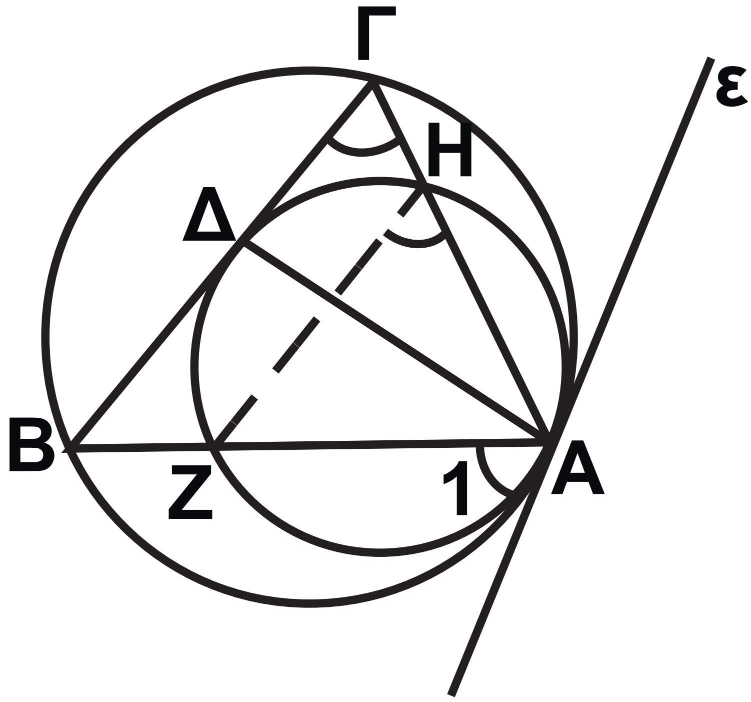
Σύνθετα Θέματα

1. Έστω ότι οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά στο Α. Φέρνουμε την **κοινή εσωτερική εφαπτομένη** η αυτών στο Α. Τότε:
$\hat{B} = \hat{A}_1$ (γωνία χορδής και εφαπτομένης στον κύκλο κέντρου Κ)

$\hat{\Gamma} = \hat{A}_2$ (γωνία χορδής και εφαπτομένης στον κύκλο κέντρου Λ)
$\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (ως κατακορυφήν)
Άρα $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ που σημαίνει ότι ΒΒ′//ΓΓ′. Έστω ότι οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά στο Α. Τότε, όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, φέρνουμε την **κοινή εξωτερική εφαπτομένη** και έχουμε: $\hat{B} = \hat{A}_1$ και $\hat{\Gamma} = \hat{A}_1$ (χορδή και εφαπτομένη), οπότε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, άρα ΒΒ′//ΓΓ′.



2. Έστω Ζ, Η τα δεύτερα κοινά σημεία των ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα με το μικρότερο κύκλο. Για να δείξουμε ότι η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας **$B\hat{A}\Gamma$** αρκεί να δείξουμε ότι η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας **$Z\hat{A}H$** και επειδή αυτή είναι εγγεγραμμένη στο μικρό κύκλο αρκεί να δείξουμε ότι τόξο ΖΔ είναι ίσο με το ΔΗ, το οποίο σύμφωνα με την άσκηση 1 είναι ισοδύναμο με την ΒΓ//ΖΗ το οποίο είναι με τη σειρά του ισοδύναμο με την $\hat{\Gamma} = \hat{H}$ που ισχύει γιατί $\hat{\Gamma} = \hat{A}_1$ και $\hat{H} = \hat{A}_1$, ως γωνίες χορδής και εφαπτομένης, όπου ε η **κοινή εξωτερική εφαπτομένη** των δύο κύκλων στο Α.

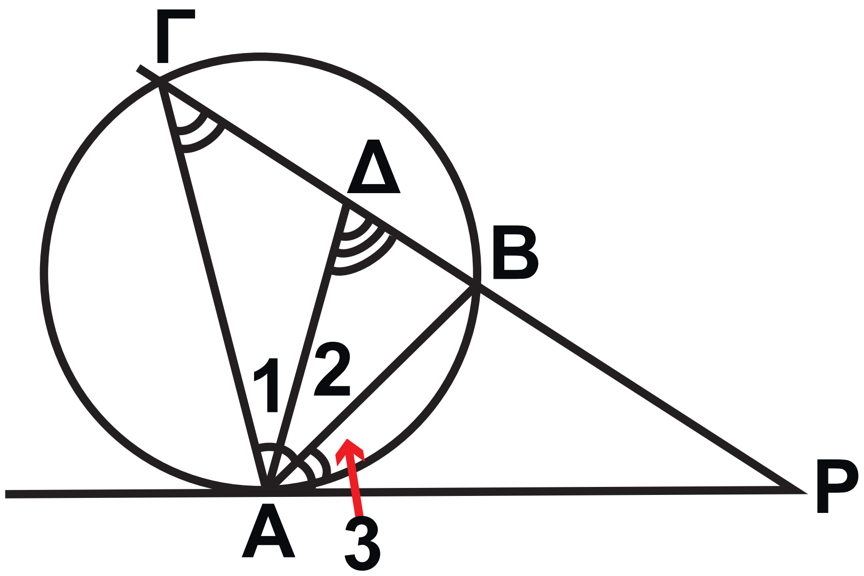


3. Για να δείξουμε ότι ΡΑ = ΓΔ αρκεί να δείξουμε ότι η γωνία $\mathbf{A\hat{\Delta}P}$ ισούται με τη γωνία $\mathbf{\Delta\hat{A}P}$.

Έχουμε: η γωνία $\mathbf{A\hat{\Delta}P}$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{\mathrm{A\Delta\Gamma}}$, οπότε: $\mathbf{A\hat{\Delta}P = \hat{\Gamma} + \hat{A}_1}$ (1).

Όμως $\hat{\Gamma} = \hat{A}_3$ (γωνία χορδής και εφαπτομένης) και $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ γιατί η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathbf{B\hat{A}\Gamma}$.

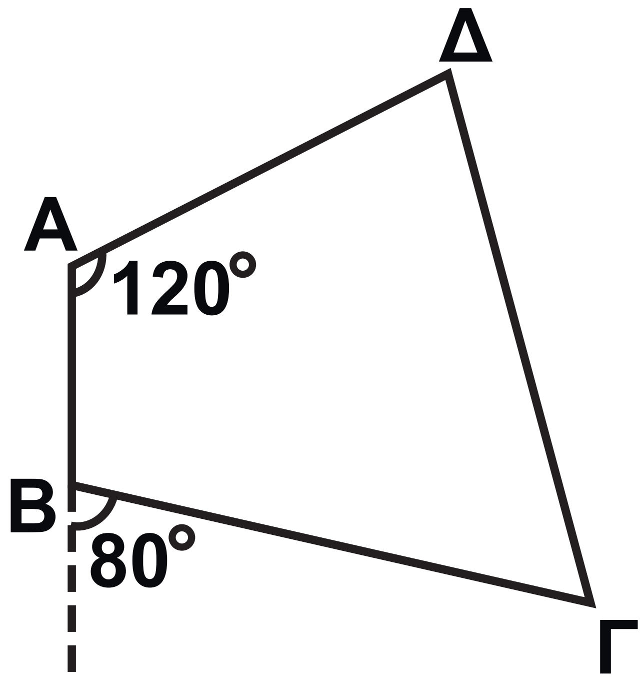
Με αντικατάσταση των $\hat{\Gamma}$ και $\hat{A}_1$ με τα ίσα τους στην (1) παίρνουμε: $A\hat{\Delta}P = \hat{A}_3 + \hat{A}_2 = \Delta\hat{A}P$, δηλ. $A\hat{\Delta}P = \Delta\hat{A}P$ που είναι το ζητούμενο.



§ 6.5-6.6

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Επειδή το ΑΒΓΔ είναι εγγράψιμο έχουμε:
$\hat{A} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$ ή $120^\circ + \hat{\Gamma} = 180^\circ$ ή
$\hat{\Gamma} = 60^\circ$.
Επίσης έχουμε $\hat{\Delta} = \hat{B}_{\varepsilon\xi}$ ή $\hat{\Delta} = 80^\circ$.
Προφανώς δε $\hat{B} = 180^\circ - \hat{B}_{\varepsilon\xi} = 100^\circ$.

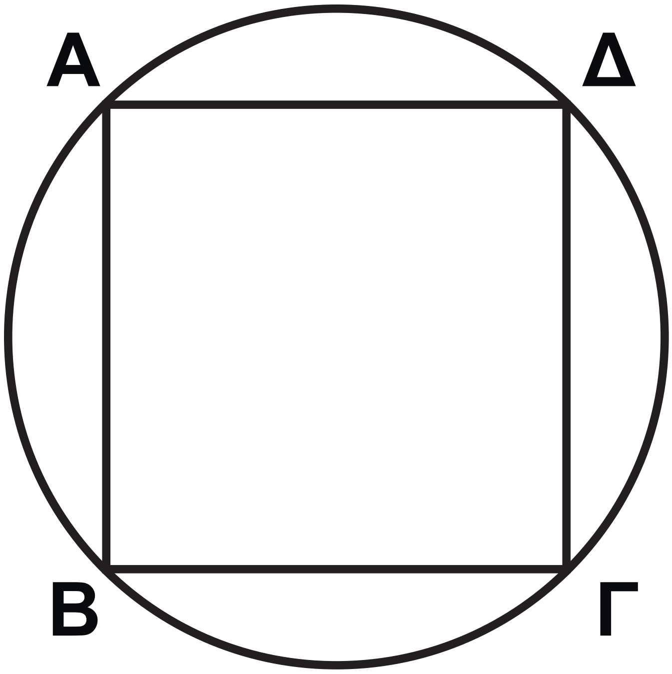


2. Επειδή ΑΒΓΔ ρόμβος θα είναι $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ (1). Αλλά ο ρόμβος ΑΒΓΔ είναι και εγγεγραμμένος σε κύκλο, οπότε $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$ (2).

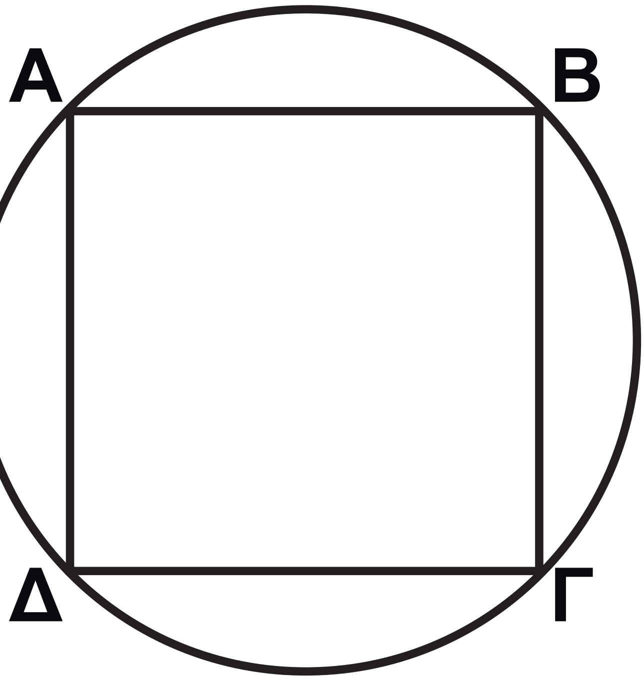
Από τις (1), (2) προκύπτει

$2\hat{A} = 180^\circ$ ή $\hat{A} = 90^\circ$.

Δηλαδή ο ρόμβος ΑΒΓΔ έχει μια γωνία ορθή, άρα είναι τετράγωνο.



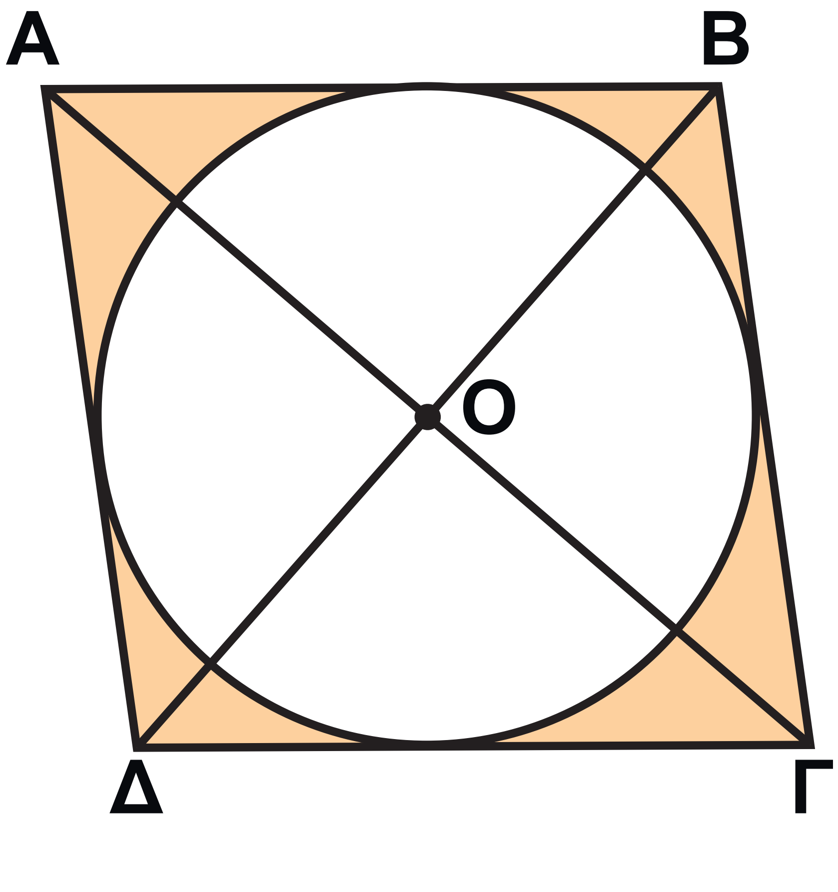
3. Σε κάθε παραλληλόγραμμο οι απέναντι γωνίες είναι ίσες, δηλαδή $\hat{A} = \hat{\Gamma}$, $\hat{B} = \hat{\Delta}$. Αφού είναι και εγγεγραμμένο, οι απέναντι γωνίες είναι και παραπληρωματικές, συνεπώς $\hat{A} = \hat{\Gamma} = 1L$ και $\hat{B} = \hat{\Delta} = 1L$.



4. i) Αφού το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο θα είναι ΑΒ = ΓΔ και ΒΓ = ΔΑ. Επειδή είναι περιγράψιμο θα έχουμε ότι: ΑΒ + ΓΔ =

= ΑΔ + ΒΓ ή 2ΑΒ = 2ΒΓ ή ΑΒ = ΒΓ. Επομένως το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος.

ii) Αφού το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος οι διαγώνιοί του διχοτομούν τις γωνίες του, επομένως τέμνονται στο κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου.



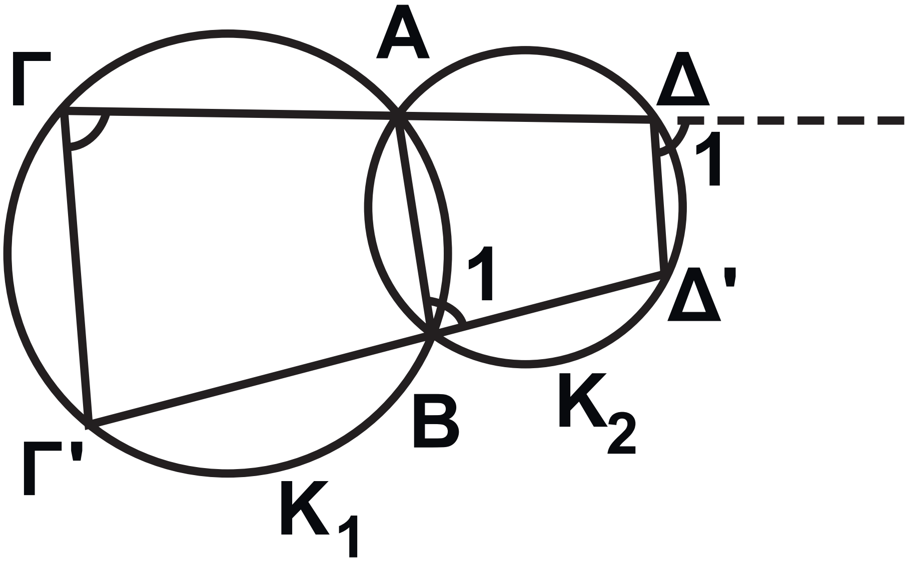
Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}_1$. Γι’ αυτό φέρνουμε την **κοινή χορδή** ΑΒ, οπότε από τα σχηματιζόμενα εγγεγραμμένα τετράπλευρα ΑΒΓ΄Γ και ΑΒΔ΄Δ έχουμε:

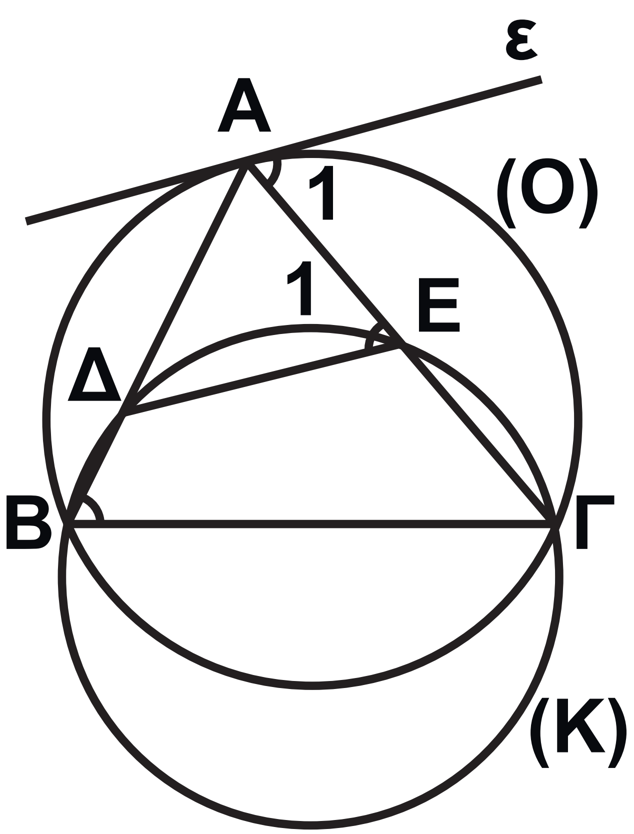
   $\hat{\Gamma} = \hat{B}_1$ ($\hat{B}_1$ εξωτερική γωνία του

   ΑΒΓ΄Γ) $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1$ ($\hat{\Delta}_1$ εξωτερική γωνία του ΑΒΔ΄Δ).

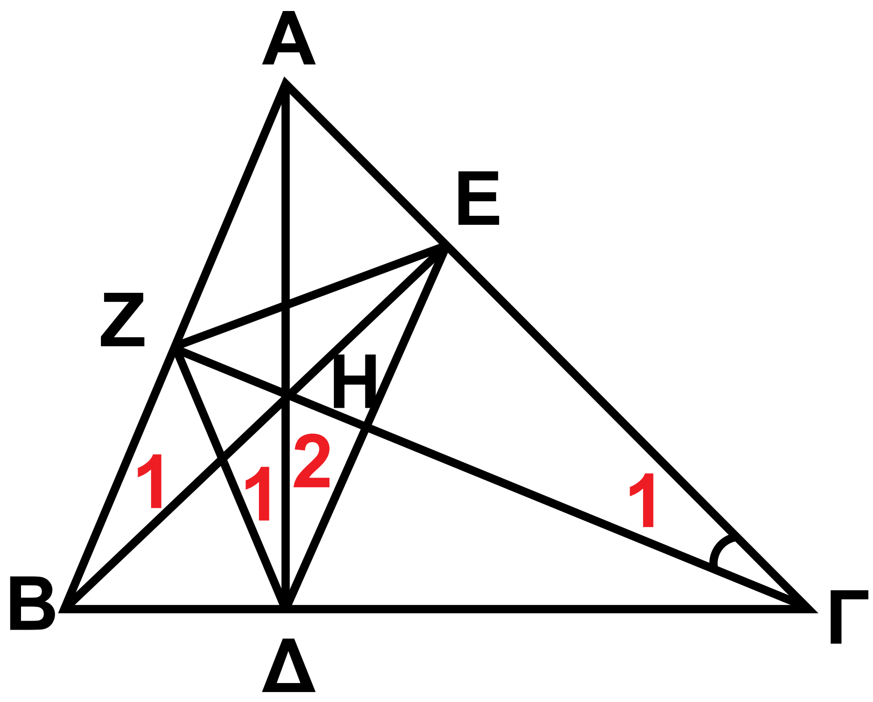
   Από τις σχέσεις αυτές προκύπτει $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}_1$, δηλ. το ζητούμενο.



2. Αρκεί να δείξουμε ότι $\hat{A}_1 = \hat{E}_1$.
Έχουμε: $\hat{A}_1 = \hat{B}$ (1) (γωνία χορδής και εφαπτομένης) στον κύκλο (Ο) και $\hat{E}_1 = \hat{B}$ (2) γιατί το ΒΔΕΓ είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο (Κ). Από τις (1) και (2) προκύπτει $\hat{A}_1 = \hat{E}_1$ το οποίο σημαίνει ότι ε//ΔΕ.



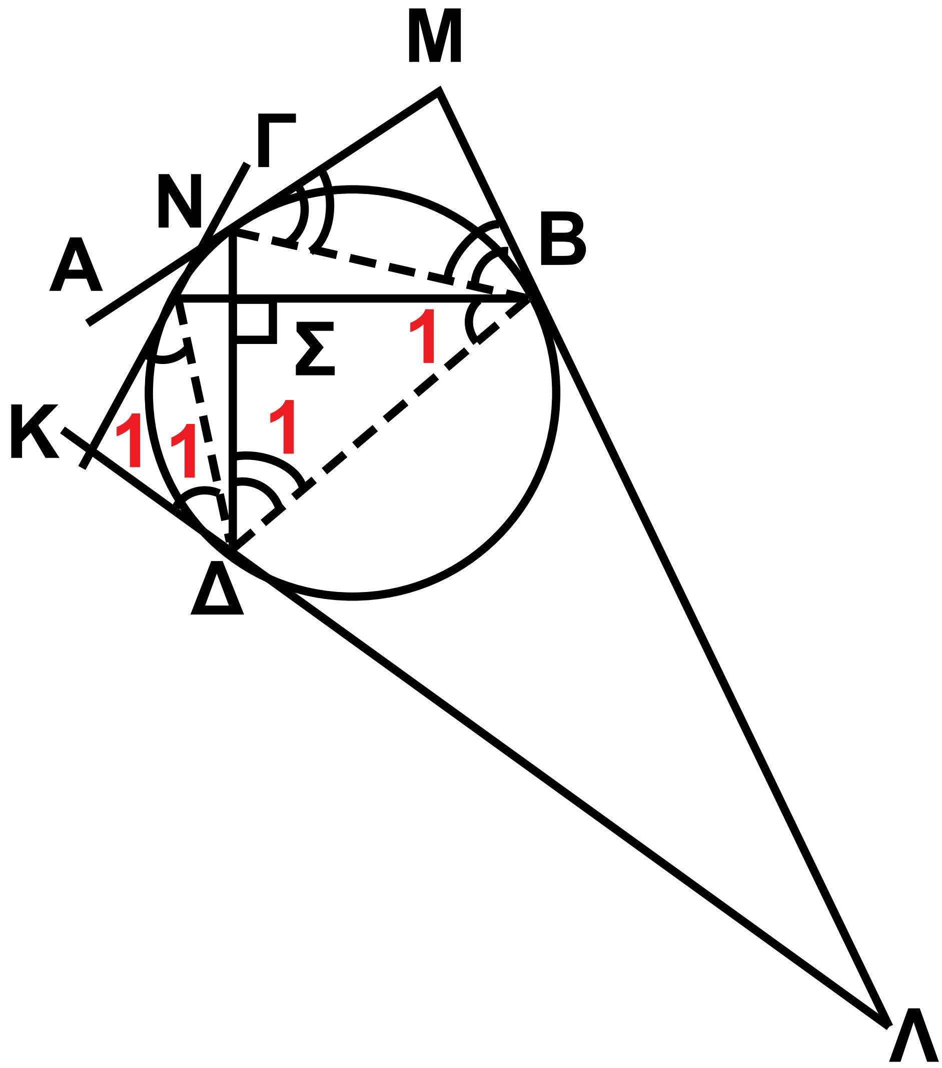
3. Είναι $B\hat{\Delta}H + B\hat{Z}H = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, οπότε το ΒΔΗΖ είναι εγγράψιμο σε κύκλο και επομένως $\hat{\Delta}_1 = \hat{B}_1$ (1). Αλλά και το ΒΖΕΓ είναι εγγράψιμο σε κύκλο, γιατί $B\hat{Z}\Gamma = B\hat{E}\Gamma = 90^\circ$, οπότε $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$ (2).
Όμως και το ΔΗΕΓ είναι κι αυτό εγγράψιμο, αφού $H\hat{\Delta}\Gamma + H\hat{E}\Gamma =$
$= 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, οπότε $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Delta}_2$ (3).
Από (1), (2) και (3) προκύπτει ότι: $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$, δηλ. ΑΔ διχοτόμος της γωνίας $Z\hat{\Delta}E$ του τριγώνου $\overset{\triangle}{\Delta EZ}$. Όμοια αποδεικνύεται και για τα άλλα ύψη.



4. Αρκεί να δείξουμε ότι $\hat{K} + \hat{M} = 180^\circ$. Είναι ΚΑ = ΚΔ, ως εφαπτόμενα τμήματα από το σημείο Κ προς τον κύκλο και επομένως $\hat{A}_1 = \hat{\Delta}_1 = \hat{\omega}$, οπότε από το τρίγωνο $\overset{\triangle}{K A \Delta}$ έχουμε $\hat{K} = 180^\circ - 2\hat{\omega}$.

Όμως $\hat{B}_1 = \hat{A}_1 = \hat{\omega}$, ως γωνία χορδής και εφαπτομένης, οπότε $\hat{K} = 180^\circ - 2\hat{B}_1$ (1).

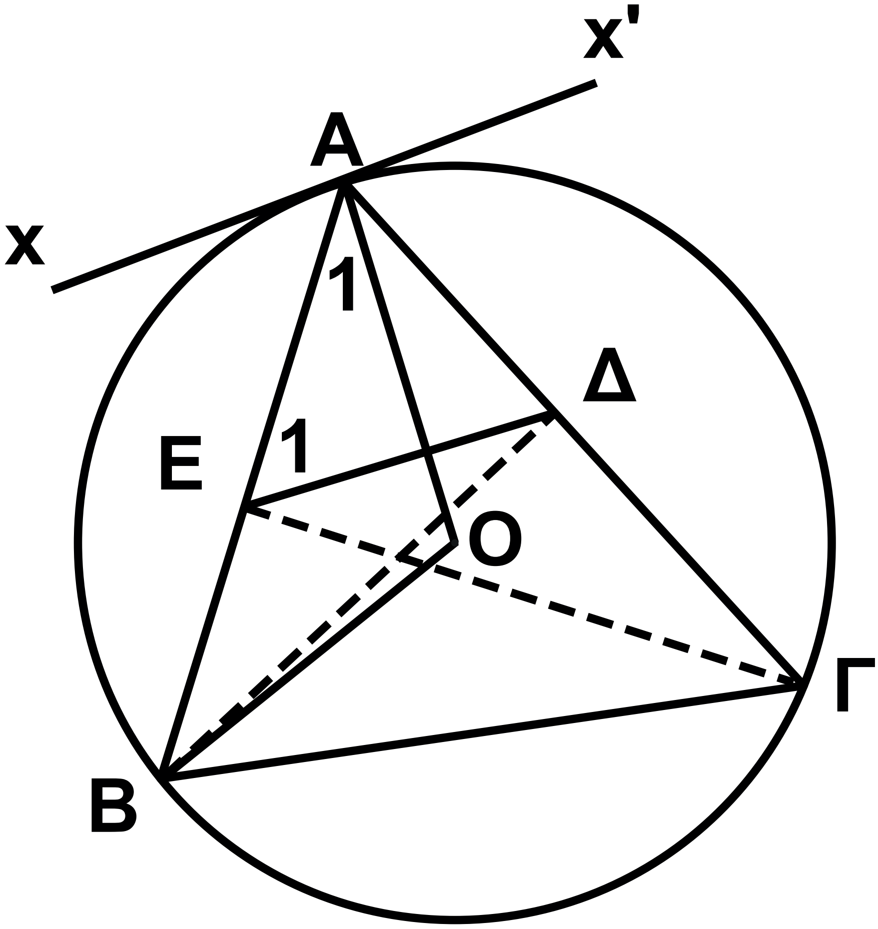
Όμοια βρίσκουμε ότι
$\hat{M} = 180^\circ - 2\hat{\Delta}_1$ **(2)**
Επειδή όμως ΑΒ ⊥ ΓΔ είναι
$\hat{B}_1 + \hat{\Delta}_1 = 90^\circ$ **(3)**
Προσθέτοντας κατά μέλη
τις (1) και (2) βρίσκουμε ότι
$\hat{K} + \hat{M} = 360^\circ - 2(\hat{B}_1 + \hat{\Delta}_1)$**, οπότε**
παίρνοντας υπόψη και την (3)
προκύπτει ότι $\hat{K} + \hat{M} = 180^\circ$ **που**
σημαίνει ότι το ΚΛΜΝ είναι εγ-
γράψιμο σε κύκλο.



Μ
Γ
Ν
Α
Β
Σ
1
Κ
1
1
1
Δ
Λ

Σύνθετα Θέματα

1. Αρκεί να δείξουμε ότι $\hat{A}_1 + \hat{E}_1 = 90^\circ$. Γι' αυτό φέρνουμε την ΟΒ, οπότε από το ισοσκελές τρίγωνο $\overset{\triangle}{AOB}$ βρίσκουμε: $2\hat{A}_1 + \hat{O} = 180^\circ$ και επειδή $\hat{O} = 2\hat{\Gamma}$, αφού $\hat{\Gamma}$ εγγεγραμμένη και $\hat{O}$ επίκεντρη που βαίνουν στο ίδιο τόξο, παίρνουμε $2\hat{A}_1 + 2\hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A}_1 + \hat{\Gamma} = 90^\circ$ (1). Επειδή όμως $B\hat{E}\Gamma = B\hat{\Delta}\Gamma = 90^\circ$ το ΒΕΔΓ είναι εγγράψιμο σε κύκλο στον οποίο η $\hat{E}_1$ είναι εξωτερική γωνία, οπότε $\hat{E}_1 = \hat{\Gamma}$ (2). Από (1) και (2) προκύπτει ότι $\hat{A}_1 + \hat{E}_1 = 90^\circ$.

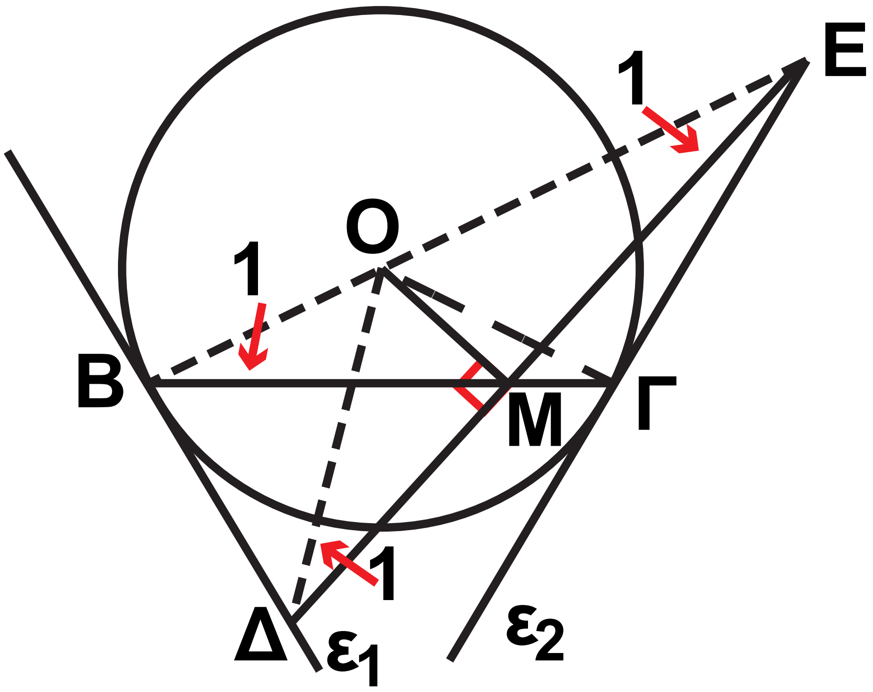


2ος τρόπος: Φέρνουμε την εφαπτομένη xx′ στο Α, οπότε ΟΑ ⊥ xx′. Αρκεί να αποδείξουμε ότι ΔΕ//xx′. Πράγματι $x\hat{A}B = \hat{\Gamma}$ (χορδή και εφαπτομένη) και $\hat{\Gamma} = \hat{E}_1$, οπότε $x\hat{A}B = \hat{E}_1$. Άρα ΔΕ//xx′.

2. Φέρνουμε τα τμήματα ΟΔ και ΟΕ.

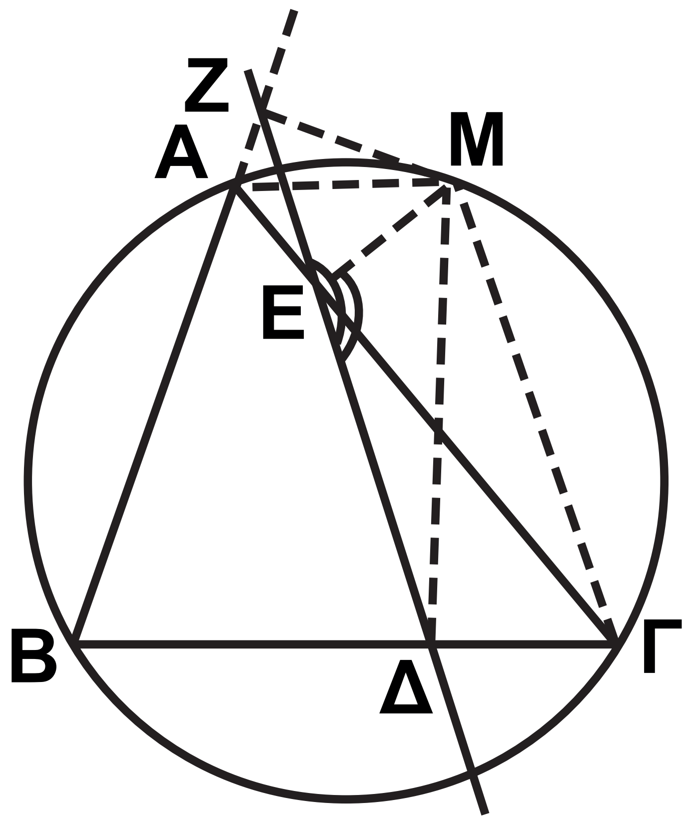
Στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{ΟΔΕ}$ το ΟΜ είναι ύψος, από κατασκευή, οπότε για να είναι ΔΜ = ΜΕ πρέπει το τρίγωνο $\overset{\triangle}{ΟΔΕ}$ να είναι ισοσκελές, δηλ. πρέπει $\hat{Δ}_1 = \hat{Ε}_1$. Επειδή $ε_1$ εφαπτομένη και ΟΒ ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής έχουμε: $Ο\hat{Β}Δ = 90^\circ$. Επίσης και $Ο\hat{Μ}Δ = 90^\circ$, οπότε το ΟΒΔΜ είναι εγγράψιμο και επομένως $\hat{Δ}_1 = \hat{Β}_1$ (1). Επίσης από $Ο\hat{Μ}Ε = Ο\hat{Γ}Ε = 90^\circ$ προκύπτει ότι ΟΜΓΕ εγγράψιμο, οπότε $\hat{Ε}_1 = \hat{Γ}_1$ (2).
Αλλά ΟΒ = ΟΓ συνεπάγεται ότι το τρίγωνο $\overset{\triangle}{ΟΒΓ}$ είναι ισοσκελές, οπότε $\hat{Β}_1 = \hat{Γ}_1$ (3).

Από (1), (2) με τη βοήθεια της (3) βρίσκουμε ότι $\hat{\Delta}_1 = \hat{E}_1$ που είναι το ζητούμενο.



3. Έστω Δ, Ε, Ζ οι προβολές ενός σημείου Μ του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ πάνω στις πλευρές του ΒΓ, ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα. Για να δείξουμε ότι τα Δ, Ε, Ζ είναι συνευθειακά αρκεί να

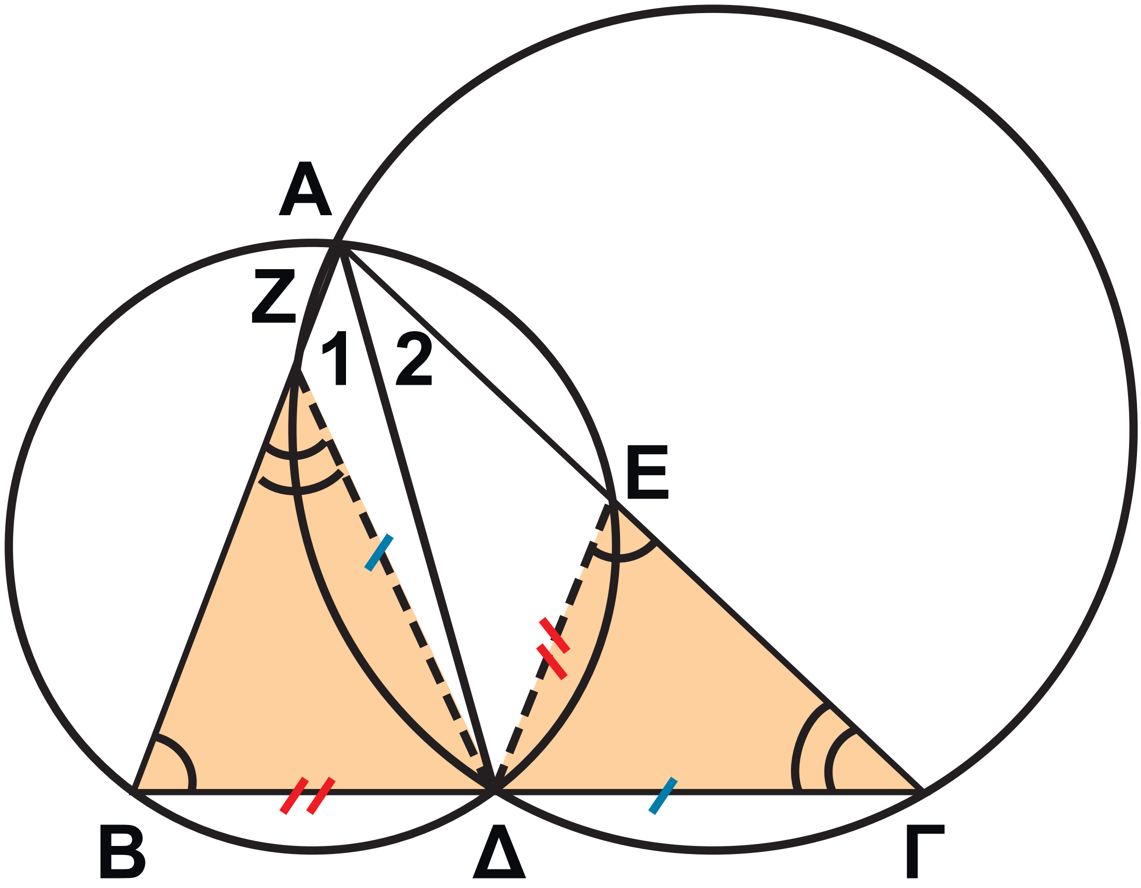
δείξουμε ότι $Z\hat{E}M + M\hat{E}\Delta = 180^\circ$.
Επειδή $M\hat{Z}A + M\hat{E}A = 90^\circ + 90^\circ =$
$= 180^\circ$ το ΜΖΑΕ είναι εγγράψιμο σε κύκλο, οπότε $M\hat{E}Z = M\hat{A}Z$ (1).
Επίσης από $M\hat{E}\Gamma = M\hat{\Delta}\Gamma = 90^\circ$ προκύπτει ότι ΜΕΔΓ εγγράψιμο και επομένως $M\hat{E}\Delta + M\hat{\Gamma}\Delta = 180^\circ$ (2)
Αλλά, αφού ΑΒΓΜ εγγεγραμμένο, θα είναι $M\hat{A}Z = M\hat{\Gamma}\Delta$ (3)
Από (1) και (3) προκύπτει ότι $M\hat{E}Z = M\hat{\Gamma}\Delta$ οπότε αντικαθιστώντας στη (2) βρίσκουμε ότι $M\hat{E}\Delta + M\hat{E}Z = 180^\circ$ η οποία σημαίνει ότι τα σημεία Δ, Ε, Ζ είναι συνευθειακά.



4. Η γωνία $\text{Ζ}\hat{\text{Α}}\text{Γ}$ είναι εγγεγραμμένη στον (Α, Δ, Γ) κύκλο και η ΑΔ είναι διχοτόμος της, άρα $\hat{\text{Α}}_1 = \hat{\text{Α}}_2$, ή $\overset{\frown}{\text{ΖΔ}} = \overset{\frown}{\text{ΔΓ}}$, οπότε και ΖΔ = ΔΓ (1). Όμοια η ΑΔ είναι διχοτόμος και της $\text{Β}\hat{\text{Α}}\text{Ε}$ που είναι εγγεγραμμένη στον (Α, Δ, Β) κύκλο, οπότε ΔΕ = ΒΔ (2).

Επειδή το ΑΒΔΕ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο θα είναι

$E\hat{\Delta}\Gamma = B\hat{A}\Gamma$ (3). Επίσης και το ΑΖΔΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο, οπότε $B\hat{\Delta}Z = B\hat{A}\Gamma$ (4).
Από (3) και (4) προκύπτει ότι $E\hat{\Delta}\Gamma = B\hat{\Delta}Z$ από την οποία με τη βοήθεια και των (1), (2) προκύπτει ότι τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{B\Delta Z}$ και $\overset{\Delta}{\Gamma\Delta E}$ είναι ίσα.



§ 6.7

Ασκήσεις Εμπέδωσης

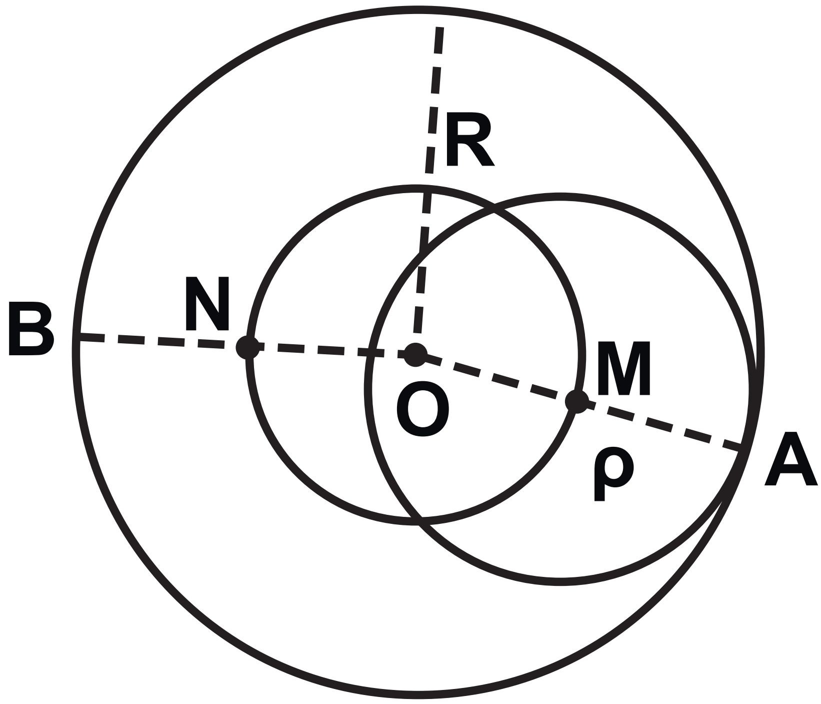
1. i) Επειδή ο δρομέας κινείται ισαπέχοντας από τις πλευρές του διαδρόμου, ο γεωμ. τόπος των θέσεών του είναι η μεσοπαράλληλη των πλευρών του διαδρόμου.

ii) Είναι ένας κύκλος ομόκεντρος της γης και ακτίνας R + 10, όπου R η ακτίνα της γης σε Km.

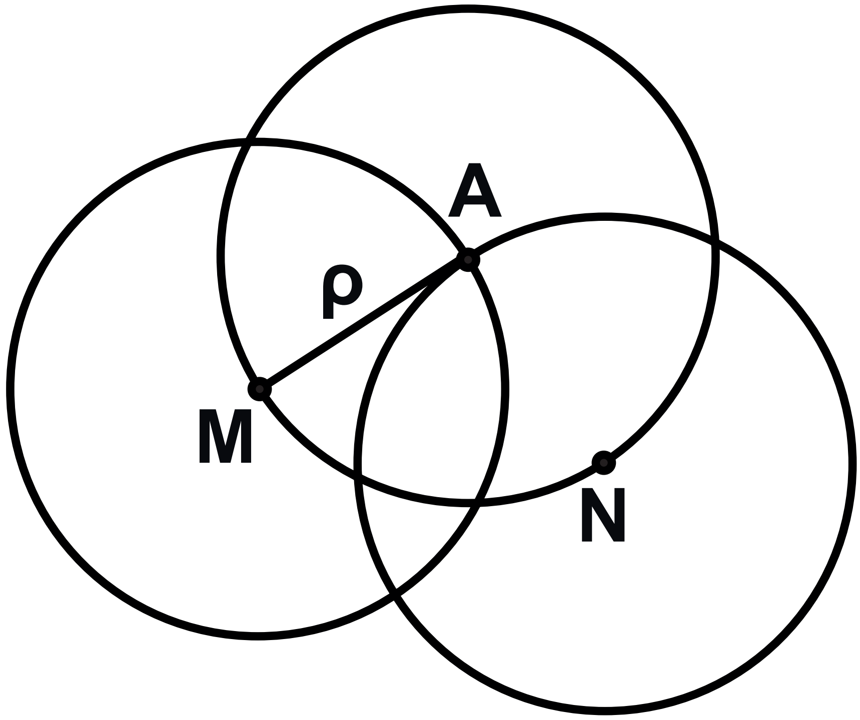
2. i) Ευθύ: Έστω (Μ, ρ) ο κύκλος γνωστής ακτίνας ρ που κυλιέται στο εσωτερικό του γνωστού κύκλου (Ο, R) και Α το μετακινούμενο μοναδικό κοινό σημείο των δύο κύκλων. Τότε

$OM = OA - MA = R - \rho$, δηλ. το τυχαίο σημείο Μ του τόπου απέχει σταθερή απόσταση από το σταθερό σημείο Ο, άρα βρίσκεται στον κύκλο $(O, R - \rho)$.

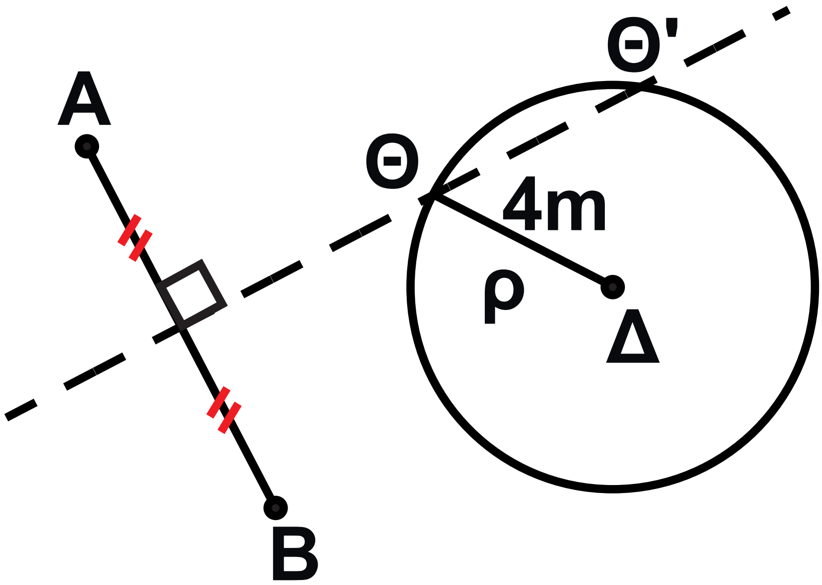
Αντίστροφο: Έστω Ν ένα σημείο του κύκλου $(O, R - \rho)$ και Β το κοινό σημείο της προέκτασης της ΟΝ με τον (O, R). Τότε $NB = OB - ON = R - (R - \rho) = \rho$, οπότε το Β είναι σημείο του κύκλου (N, ρ). Επειδή δε το Β είναι σημείο της διακέντρου των (O, R) και (N, ρ) το Β είναι το μοναδικό κοινό σημείο των δυο κύκλων. Άρα το Ν είναι κέντρο κύκλου ακτίνας ρ που εφάπτεται στον (O, R) εσωτερικά. Επομένως γεωμ. τόπος του Μ είναι ο κύκλος $(O, R - \rho)$.



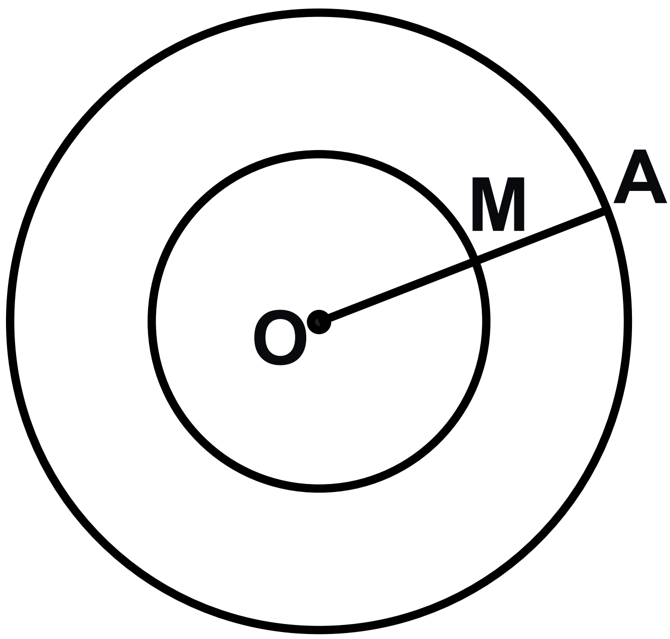
ii) **Ευθύ:** Έστω (Μ, ρ) ένας κύκλος γνωστής ακτίνας ρ που διέρχεται από το σταθερό σημείο Α, τότε ΑΜ = ρ που σημαίνει ότι το Μ βρίσκεται στον κύκλο (Α, ρ). **Αντίστροφο:** Έστω Ν τυχαίο σημείο του κύκλου (Α, ρ). Τότε ΝΑ = ρ, οπότε το Ν είναι το κέντρο κύκλου που διέρχεται από το Α και έχει ακτίνα ρ. Επομένως ο ζητούμενος γεωμ. τόπος είναι ο κύκλος (Α, ρ).



3. Έστω Θ η θέση του θησαυρού. Επειδή ΘΑ = ΘΒ το Θ είναι σημείο της μεσοκαθέτου ε του τμήματος ΑΒ με άκρα τις θέσεις των δένδρων. Εξάλλου αφού το Θ απέχει από το δέντρο Δ απόσταση 4m θα βρίσκεται και στον κύκλο (Δ, 4m). Άρα η ζητούμενη θέση του θησαυρού θα είναι στα κοινά σημεία της ε με τον κύκλο (Δ, 4m).



4. Αν R είναι η ακτίνα του δοθέντος κύκλου, είναι φανερό ότι ο γεωμ. τόπος των μέσων Μ της ακτίνας ΟΑ, καθώς το Α κινείται πάνω στον (Ο, R), είναι ο κύκλος $\left(O, \dfrac{R}{2}\right)$.



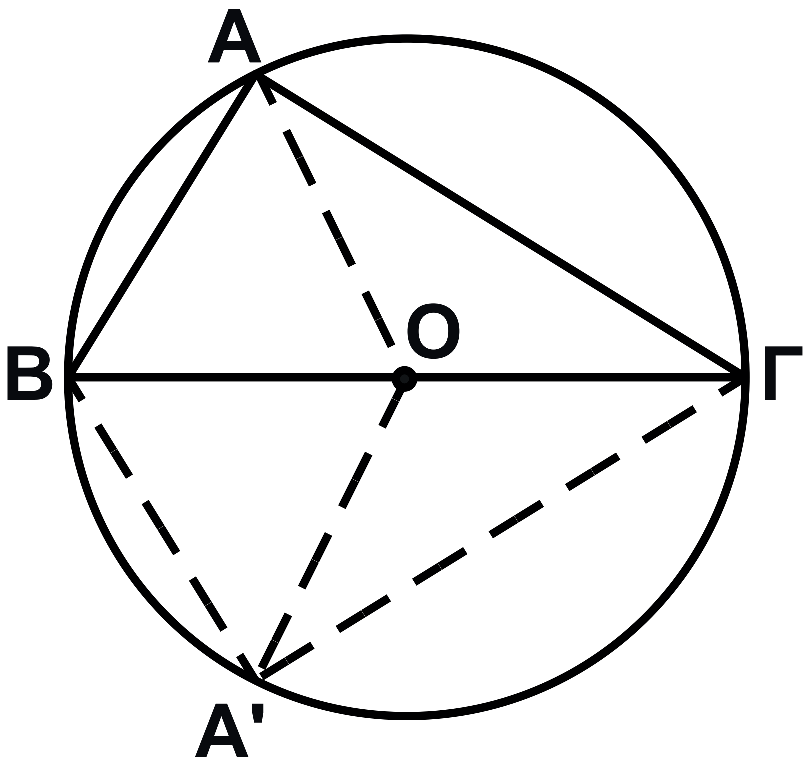
1. Ευθύ: Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\triangle}{\text{ΑΒΓ}}$ με σταθερή υποτείνουσα ΒΓ = α. Φέρνουμε τη διάμεσο ΑΟ που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, τότε $\text{ΑΟ} = \frac{\text{ΒΓ}}{2} = \frac{\alpha}{2}$ η οποία σημαίνει ότι το μεταβλητό σημείο Α απέχει από το σταθερό σημείο Ο σταθερή απόσταση $\frac{\alpha}{2}$, άρα το Α βρίσκεται στον κύκλο $\left(\text{Ο}, \frac{\alpha}{2}\right)$.

Αντίστροφο: Γράφουμε τον κύκλο $\left(\text{Ο}, \frac{\alpha}{2}\right)$ και έστω Α′ ένα σημείο του, διαφορετικό των Β, Γ.

Τότε τα Α′, Β, Γ δεν είναι συνευθειακά, ορίζουν επομένως τρίγωνο. Το τρίγωνο αυτό είναι ορθογώνιο στο Α′, αφού για τη διάμεσο Α′Ο ισχύει: $A'O = \frac{\alpha}{2} = \frac{B\Gamma}{2}$.

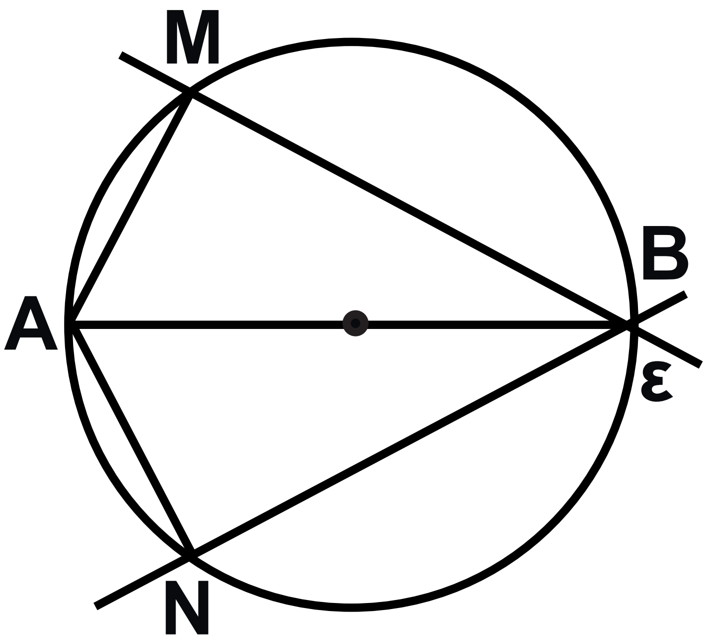
Άρα κάθε σημείο του κύκλου $\left(O, \frac{\alpha}{2}\right)$, διαφορετικό των άκρων Β, Γ της σταθερής διαμέτρου ΒΓ αυτού είναι κορυφή της ορθής γωνίας Α του μεταβλητού τριγώνου $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$.

Επομένως γεωμ. τόπος του Α είναι ο κύκλος $\left(O, \frac{\alpha}{2}\right)$ χωρίς τα σημεία του Β, Γ.



2. Ευθύ: Έστω ε μια ευθεία που διέρχεται από το Β και Μ η προβολή του Α πάνω στην ε. Τότε $\mathbf{A\hat{M}B} = 1L$, οπότε το Μ βρίσκεται σε κύκλο με διάμετρο το ΑΒ.
Αντίστροφο: Γράφουμε τον κύκλο διαμέτρου ΑΒ και θεωρούμε ένα σημείο Ν αυτού, διαφορετικό των Α, Β. Τότε $\mathbf{A\hat{N}B} = 1L$ (εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο) και επομένως το Ν είναι

προβολή του Α πάνω στην ευθεία ΝΒ, που διέρχεται από το Β. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι κάθε σημείο του κύκλου διαμέτρου ΑΒ, διαφορετικό των Α, Β είναι σημείο του ζητούμενου γεωμ. τόπου. Όμως στο γεωμ. τόπο ανήκουν και τα Α, Β γιατί το μεν Α είναι προβολή του εαυτού του πάνω στην ΑΒ, ενώ το Β είναι προβολή του Α πάνω στην ευθεία που διέρχεται από το Β και είναι κάθετη στην ΑΒ. Επομένως ο ζητούμενος γεωμ. τόπος είναι ο κύκλος διαμέτρου ΑΒ.

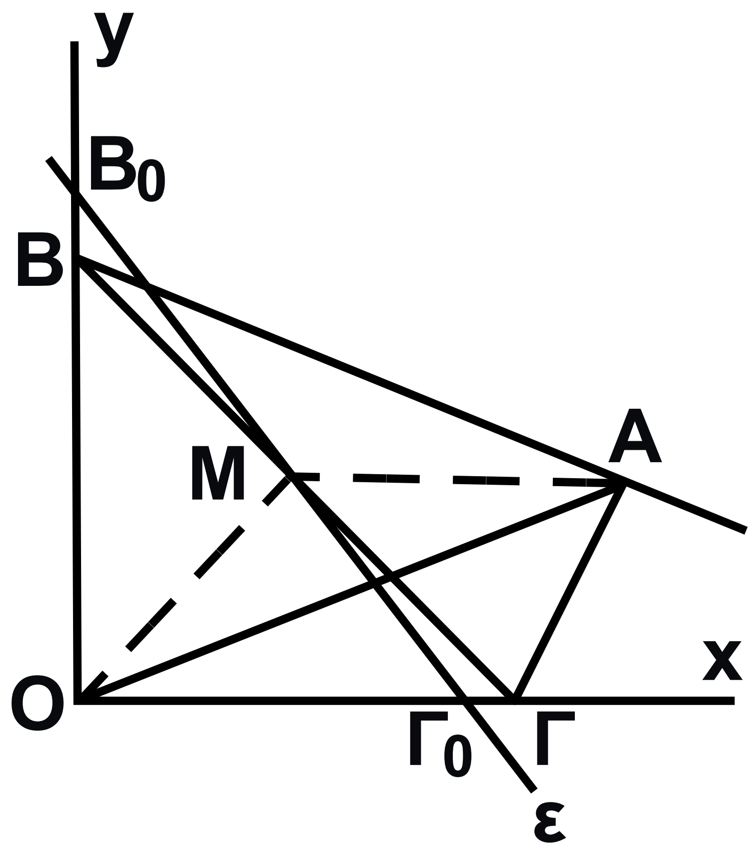


3. Ευθύ: Έστω Μ το μέσο της υποτείνουσας ΒΓ του ορθογωνίου τριγώνου $\overset{\triangle}{\text{ΑΒΓ}}$ του προβλήματος.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\triangle}{\text{ΟΒΓ}}$ η ΟΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, επομένως $\text{ΟΜ} = \dfrac{\text{ΒΓ}}{2}$ (1).

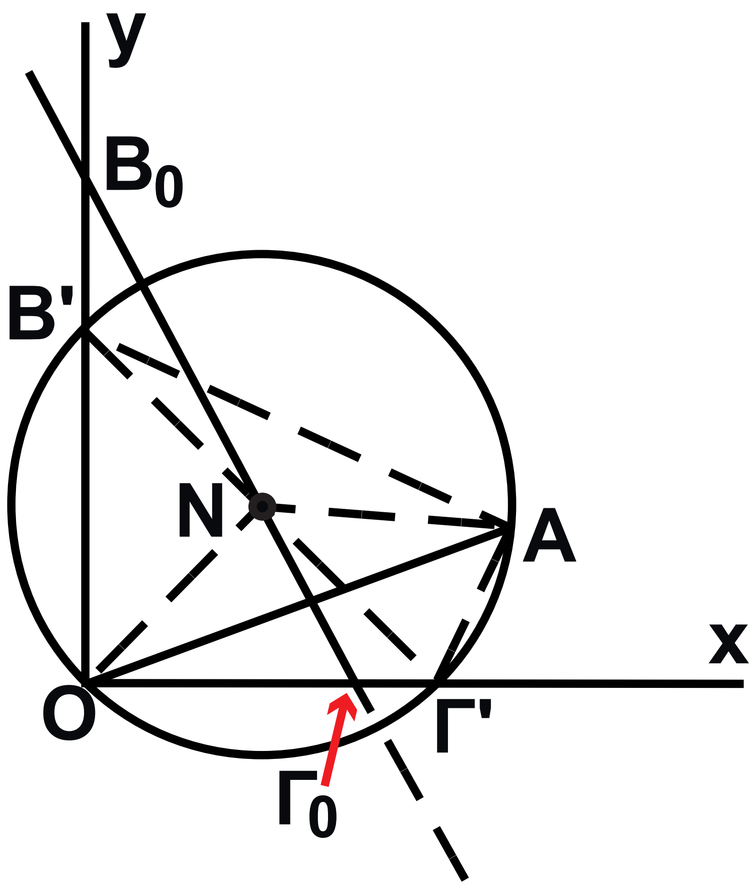
Όμοια στο ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\triangle}{\text{ΑΒΓ}}$ η ΑΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, οπότε $\text{ΑΜ} = \dfrac{\text{ΒΓ}}{2}$ (2).

Από (1), (2) προκύπτει ΟΜ = ΜΑ το οποίο σημαίνει ότι το Μ βρίσκεται στη μεσοκάθετη ε του τμήματος ΟΑ.



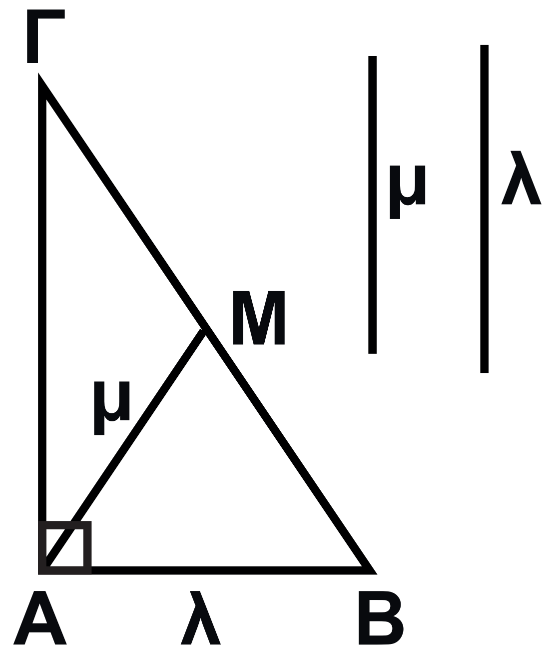
Αντίστροφο: Φέρνουμε τη μεσοκάθετη ε του τμήματος ΟΑ και θεωρούμε τυχαίο σημείο Ν της ε. Γράφουμε τον κύκλο (Ν, ΝΟ), ο οποίος τέμνει τις Οy, Οx στα σημεία Β′, Γ′ αντίστοιχα. Επειδή $B'\hat{O}\Gamma' = 90^\circ$ το Β′Γ′ είναι διάμετρος του κύκλου (Ν, ΝΟ) και επομένως διέρχεται από το κέντρο Ν, οπότε θα είναι Β′Ν= ΝΓ′, δηλαδή το Ν είναι μέσο του Β′Γ′.

Άρα θα έχουμε $NA = NO = \frac{B'\Gamma'}{2}$ (γιατί το ΟΝ διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου $O\overset{\triangle}{B'}\Gamma'$). Έτσι για τη διάμεσο ΝΑ του τριγώνου $A\overset{\triangle}{B'}\Gamma'$ έχουμε $NA = \frac{B'\Gamma'}{2}$ το οποίο σημαίνει ότι $B'\hat{A}\Gamma' = 90^\circ$. Όμως το Ν είναι εσωτερικό σημείο της γωνίας, άρα γεωμ. τόπος του Μ είναι το τμήμα $B_0\Gamma_0$ της μεσοκαθέτου ε που βρίσκεται στο εσωτερικό της γωνίας, συμπεριλαμβανομένων και των άκρων B_0, Γ_0.



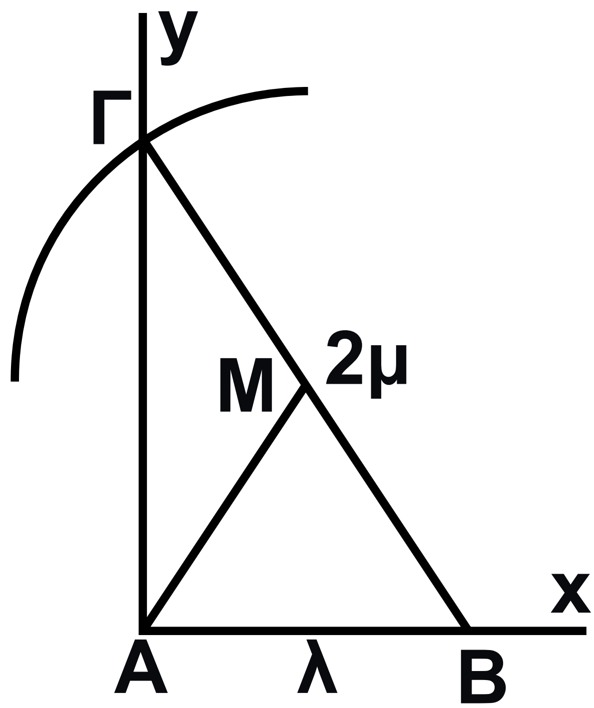
4. i) Ανάλυση: Έστω $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$ το ζητούμενο τρίγωνο που έχει:

$\hat{Α} = 1L$, $ΑΒ = λ$ και διάμεσο $ΑΜ = μ$. Τότε $ΒΓ = 2ΑΜ = 2μ$, οπότε έχουμε να κατασκευάσουμε ορθογώνιο τρίγωνο από την υποτείνουσα και μια κάθετη πλευρά.



Σύνθεση: Κατασκευάζουμε ορθή γωνία **$x\hat{A}y$**, στην Αx παίρνουμε σημείο Β ώστε ΑΒ = λ και γράφουμε τον κύκλο (Β, 2μ), ο οποίος τέμνει την ημιευθεία Αy στο Γ. Το τρίγωνο **$\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$** είναι το ζητούμενο.

Απόδειξη: Το τρίγωνο **$\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$** έχει: **$\hat{A}$ = $x\hat{A}y$** = 1L, από κατασκευή της **$x\hat{A}y$**, ΑΒ = λ από κατασκευή και διάμεσο **ΑΜ** = $\frac{ΒΓ}{2} = \frac{2μ}{2}$ = μ δηλαδή τα δοθέντα στοιχεία.

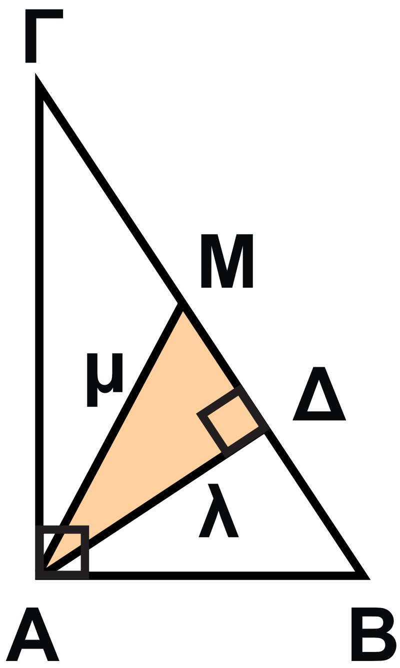


Διερεύνηση: Για να υπάρχει λύση θα πρέπει ο κύκλος (Β, 2μ) να τέμνει την Αy, το οποίο συμβαίνει όταν λ < 2μ.

ii) Έστω $\overset{\triangle}{\text{ΑΒΓ}}$ το ζητούμενο τρίγωνο που έχει:

$\hat{\text{Α}}$ = 1L, διάμεσο ΑΜ = μ και ύψος ΑΔ = λ.

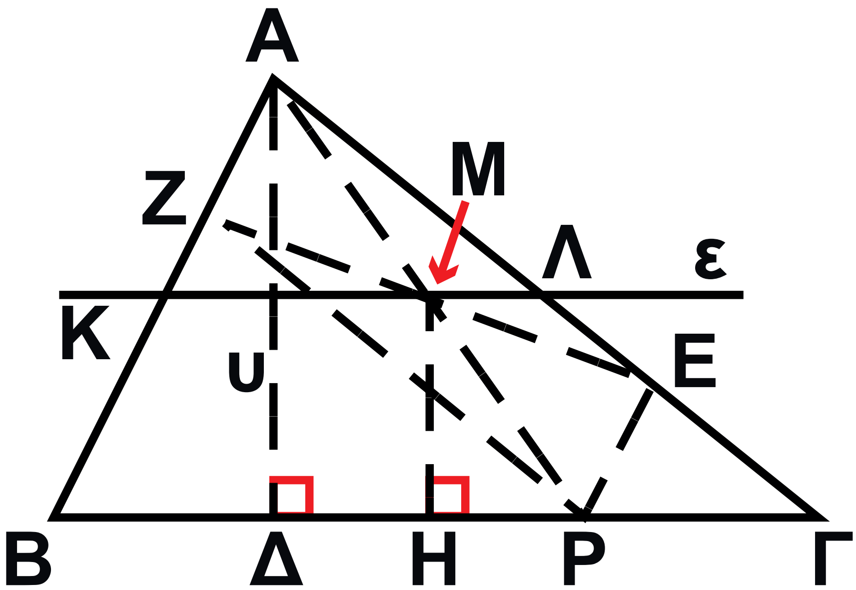
Παρατηρούμε ότι το ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\triangle}{\text{ΔΑΜ}}$ ($\hat{\text{Δ}}$ = 1L) κατασκευάζεται γιατί έχει γνωστή υποτείνουσα ΑΜ = μ και μια κάθετη πλευρά ΑΔ = λ. Έτσι για τη σύνθεση, κατασκευάζουμε πρώτα το ΔΑΜ και παίρνουμε την προέκταση της ΜΔ και εκατέρωθεν του Μ τα σημεία Β, Γ ώστε ΜΒ = ΜΓ = = μ. Τότε το τρίγωνο $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$ είναι το ζητούμενο. Για να υπάρχει λύση πρέπει να κατασκευάζεται το τρίγωνο $\overset{\triangle}{ΔΑΜ}$ το οποίο συμβαίνει όταν λ < μ.



Σύνθετα Θέματα

1. Από τυχαίο σημείο Ρ της ΒΓ φέρνουμε ΡΕ//ΑΒ και ΡΖ//ΑΓ. Ζητάμε το γεωμ. τόπο του μέσου Μ του ΖΕ. Το ΑΖΡΕ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε οι διαγώνιες ΑΡ και ΖΕ διχοτομούνται, άρα το Μ είναι και μέσο του ΑΡ. Φέρνουμε το ύψος ΑΔ = υ και ΜΗ ⊥ ΒΓ.

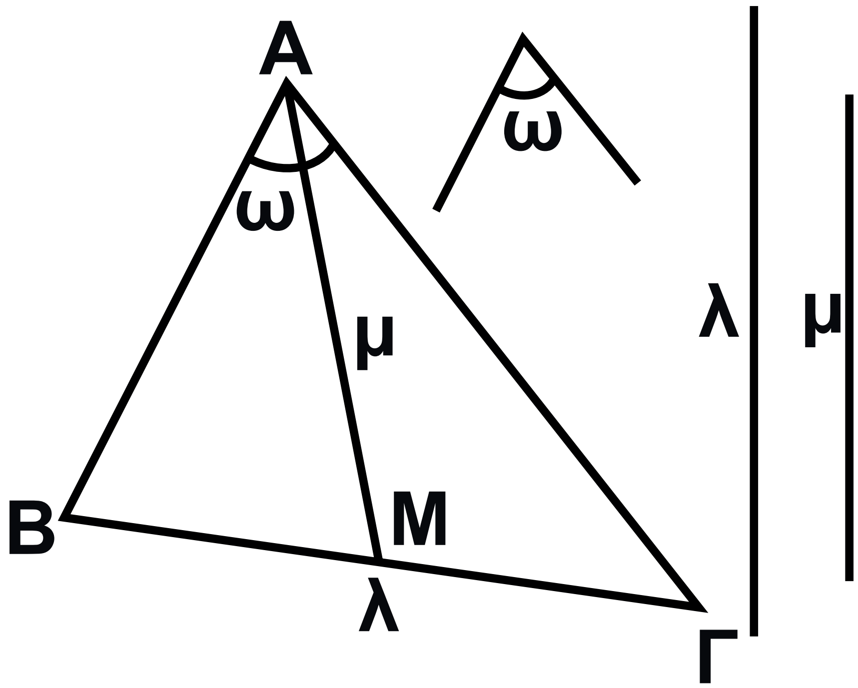
Στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{\text{ΑΔΡ}}$ είναι ΜΗ//ΑΔ και Μ μέσο της πλευράς ΑΡ, οπότε $\text{ΜΗ} = \dfrac{\text{ΑΔ}}{2}$ ή $\text{ΜΗ} = \dfrac{υ}{2}$, η οποία σημαίνει ότι το Μ απέχει σταθερή απόσταση $\dfrac{υ}{2}$ από τη σταθερή ευθεία ΒΓ και επομένως βρίσκεται σε ευθεία ε//ΒΓ που απέχει $\dfrac{υ}{2}$ από τη ΒΓ. Επειδή το Ρ είναι σημείο του τμήματος ΒΓ το Μ είναι σημείο του τμήματος ΚΛ.



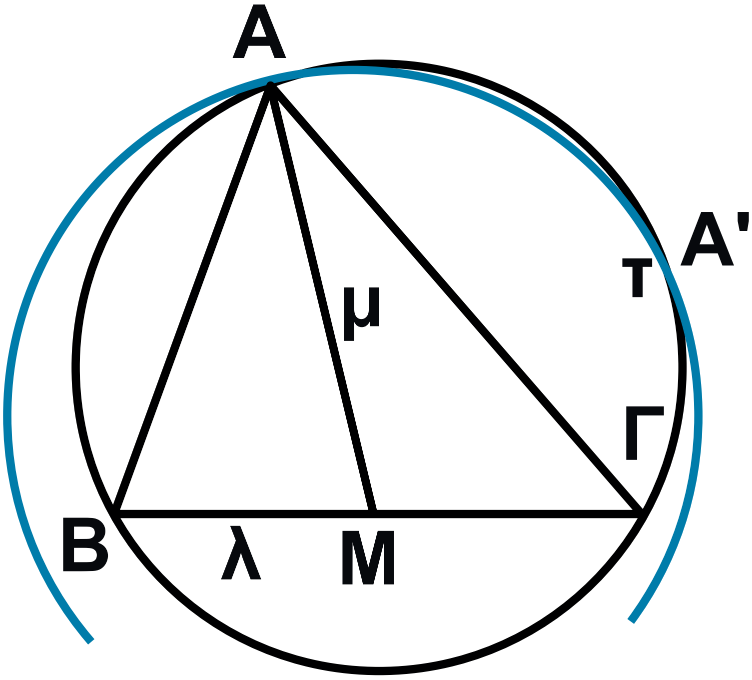
Αντίστροφο: Έστω Μ σημείο του ΚΛ και Ρ η τομή της ΑΜ με τη ΒΓ. Από το Ρ φέρνουμε ΡΕ//ΑΒ και ΡΖ//ΑΓ, οπότε στο παραλληλόγραμμο ΑΖΡΕ το Μ είναι μέσο της μιας διαγωνίου ΑΡ και επομένως θα είναι και μέσο της άλλης διαγωνίου ΖΕ. Άρα κάθε σημείο Μ

του τμήματος ΚΛ είναι σημείο του ζητούμενου γεωμ. τόπου και επομένως γεωμ. τόπος του Μ είναι το τμήμα ΚΛ.

2. i) Ανάλυση: Έστω $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ το ζητούμενο τρίγωνο που έχει: ΒΓ = λ, $\hat{A} = \omega$ και διάμεσο ΑΜ = μ. Επειδή $\hat{A} = \omega$ το Α βλέπει το σταθερό τμήμα ΒΓ = λ υπό σταθερή γωνία, άρα θα είναι σημείο του τόξου τ που γράφεται με χορδή τη ΒΓ και δέχεται γωνία ω. Επίσης, αφού ΑΜ = μ το Α απέχει σταθερή απόσταση από το σταθερό σημείο Μ, άρα θα είναι σημείο του κύκλου (Μ, μ). Άρα το Α είναι σημείο της τομής του τόξου τ και του κύκλου (Μ, μ).



Σύνθεση: Παίρνουμε τμήμα ΒΓ = λ και με χορδή αυτό γράφουμε το τόξο τ που δέχεται γωνία ω. Επίσης παίρνουμε το μέσο Μ του τμήματος ΒΓ και γράφουμε τον κύκλο (Μ, μ) ο οποίος τέμνει το τόξο τ.
Αν Α είναι ένα σημείο τομής, το τρίγωνο $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$ είναι το ζητούμενο τρίγωνο.



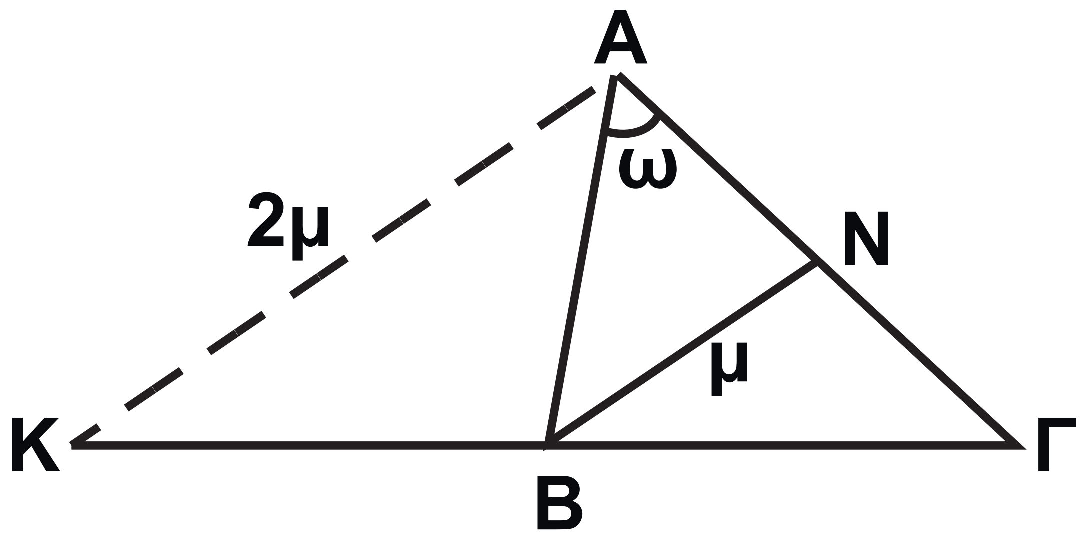
Απόδειξη: Το τρίγωνο $\overset{\triangle}{\text{ΑΒΓ}}$ έχει ΒΓ = λ, από κατασκευή, $\hat{\text{Α}}$ = ω γιατί είναι εγγεγραμμένη στο τόξο τ που δέχεται γωνία ω και διάμεσο ΑΜ = μ, ως ακτίνα του κύκλου (Μ, μ).

Διερεύνηση: Για να υπάρχει λύση πρέπει ο κύκλος (Μ, μ) να έχει κοινά σημεία με το τόξο τ. Αν υπάρχει και δεύτερο κοινό σημείο Α′ τότε το τρίγωνο $\overset{\triangle}{\text{Α}'\text{ΒΓ}}$ είναι ίσο με το τρίγωνο $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$, οπότε δεν έχουμε δεύτερη λύση. Αν θεωρήσουμε και το τόξο τ′ του αντικειμένου ημιεπιπέδου ως προς την ΒΓ τότε τα τρίγωνα που προκύπτουν είναι πάλι ίσα με το τρίγωνο $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$.

ii) **Ανάλυση:** Έστω $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$ το ζητούμενο τρίγωνο που έχει: ΒΓ = λ, $\hat{Α}$ = ω και διάμεσο ΒΝ = μ. Από το Α φέρνουμε παράλληλη προς τη ΒΝ, που τέμνει την προέκταση της ΓΒ στο Κ. Τότε στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{ΑΚΓ}$ Ν μέσο της ΑΓ και ΝΒ//ΑΚ, οπότε Β μέσο ΚΓ και ΑΚ = 2ΒΝ = = 2μ.
Επειδή ΚΒ = ΒΓ το σημείο Κ είναι ένα σταθερό σημείο και αφού

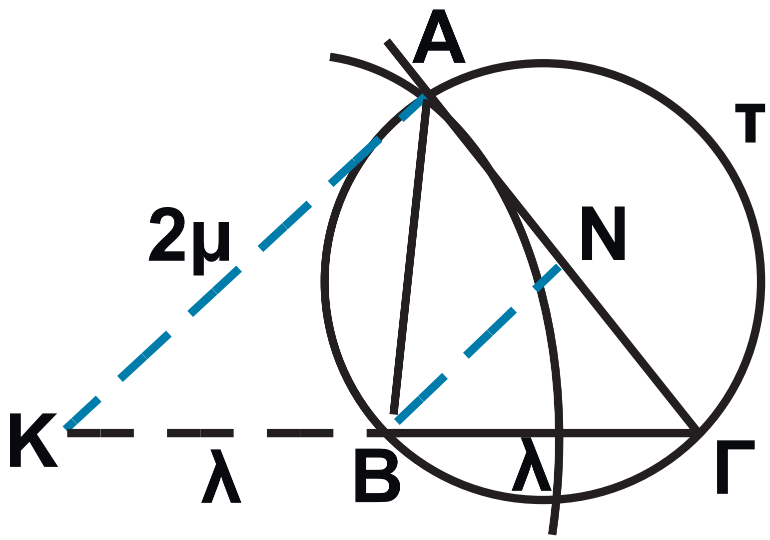
ΚΑ = 2μ = σταθερό το Α είναι σημείο του κύκλου (Κ, 2μ).

Επίσης αφού $\hat{A} = \omega$ το Α βρίσκεται σε τόξο τ που γράφεται με χορδή τη ΒΓ και δέχεται γωνία ω. Άρα το Α είναι σημείο της τομής του τόξου τ και του κύκλου (Κ, 2μ).



Σύνθεση: Παίρνουμε τμήμα ΒΓ = λ και στην προέκταση της ΓΒ σημείο Κ έτσι ώστε ΚΒ = ΒΓ. Γράφουμε τον κύκλο (Κ, 2μ). Στη συνέχεια με χορδή το ΒΓ γράφουμε τόξο τ που δέχεται γωνία ω. Αν Α είναι το σημείο τομής του τ με τον (Κ, 2μ) το τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ είναι το ζητούμενο.

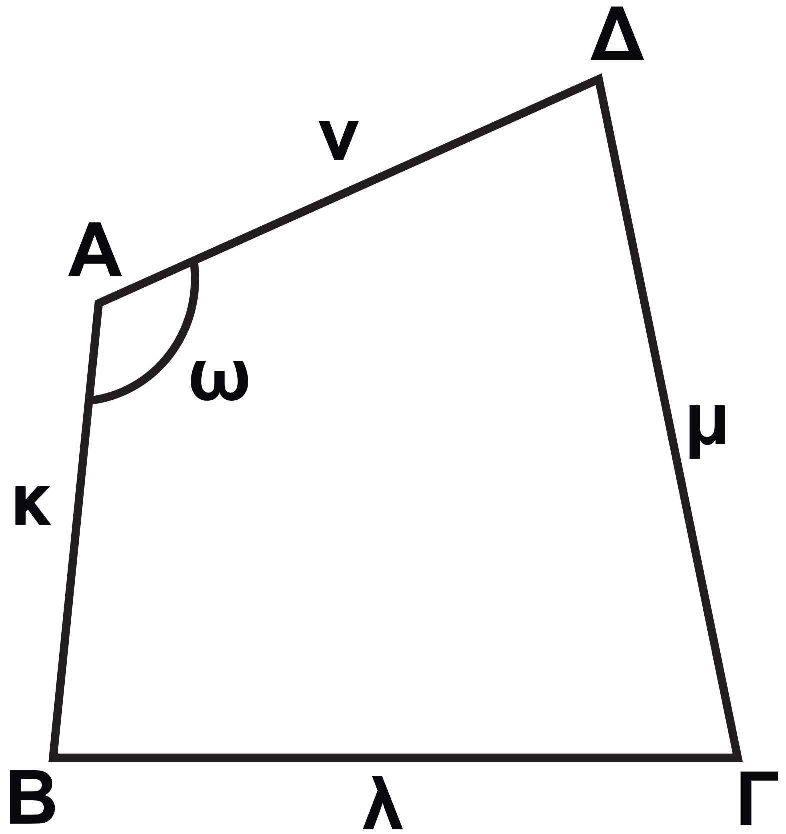
Απόδειξη: Το τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ έχει: ΒΓ = λ, από κατασκευή, $\hat{A} = \omega$, γιατί είναι εγγεγραμμένη στο τόξο τ που δέχεται γωνία ω και διάμεσο $BN = \frac{KA}{2} = \frac{2\mu}{2} = \mu$.



Διερεύνηση: Για να υπάρχει λύση θα πρέπει ο κύκλος (Κ, 2μ) να τέμνει το τόξο τ και προφανώς $0^\circ < \omega < 180^\circ$.

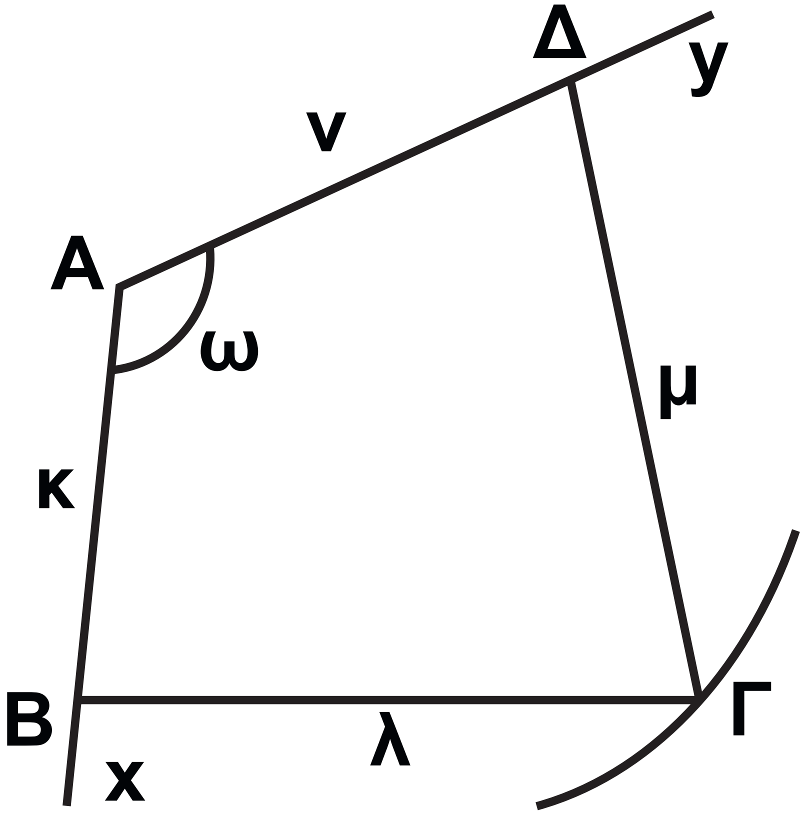
3. Ανάλυση: Έστω ΑΒΓΔ το ζητούμενο τετράπλευρο που έχει ΑΒ = κ, ΒΓ = λ, ΓΔ = μ, ΔΑ = ν και $\hat{A} = \omega$.
Παρατηρούμε ότι στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{ΑΒΔ}$ γνωρίζουμε δυο πλευρές του και την περιεχόμενη γωνία, επομένως αυτό κατασκευάζεται.

Έτσι προσδιορίζονται οι τρεις κορυφές Α, Β και Δ του τετραπλεύρου. Η κορυφή Γ πλέον είναι η τομή των κύκλων (Β, λ) και (Δ, μ).



Σύνθεση: Με κορυφή τυχαίο σημείο Α κατασκευάζουμε γωνία $x\hat{A}y = \omega$ και στις πλευρές της παίρνουμε τα τμήματα ΑΒ = κ και ΑΔ = ν. Στη συνέχεια γράφουμε τους κύκλους (Β, λ) και (Δ, μ) που

τέμνονται στο Γ. Το ΑΒΓΔ είναι το ζητούμενο.



Απόδειξη: Από κατασκευή έχει $AB = \kappa$, $A\Delta = \nu$ και $\hat{A} = \omega$. Επίσης $B\Gamma = \lambda$, ως ακτίνα του (B, λ) και $\Delta\Gamma = \mu$ ως ακτίνα του (Δ, μ).

Διερεύνηση: Πρέπει $0^\circ < \omega < 180^\circ$ και οι κύκλοι (B, λ) και (Δ, μ) να τέμνονται.

Γενικές Ασκήσεις

1. α) Επειδή ΜΔ//ΑΓ, ως κάθετες στην ΑΒ και Μ μέσο ΒΓ θα είναι και Ν μέσο ΑΒ, οπότε ΜΔ μεσοκάθετος ΑΒ και επομένως ΑΔ = ΔΒ απ' όπου προκύπτει ότι

$\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ (1).

Όμοια βρίσκουμε ότι $\hat{A}_2 = \hat{\Gamma}_1$ (2).

Από (1) και (2) έχουμε

$\hat{A}_1 + \hat{A} + \hat{A}_2 = \hat{B}_1 + 90^\circ + \hat{\Gamma}_1 =$

$= 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$.

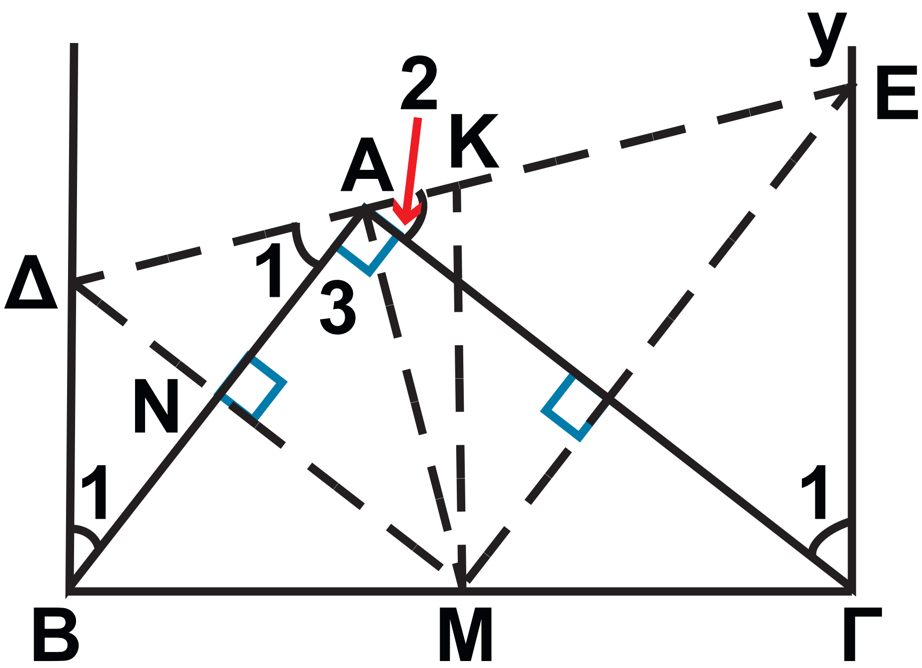
Άρα Δ, Α, Ε συνευθειακά.

β) Επειδή ΑΜ διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ΑΜ = ΒΜ, οπότε $\hat{A}_3 = \hat{B}$ και επομένως

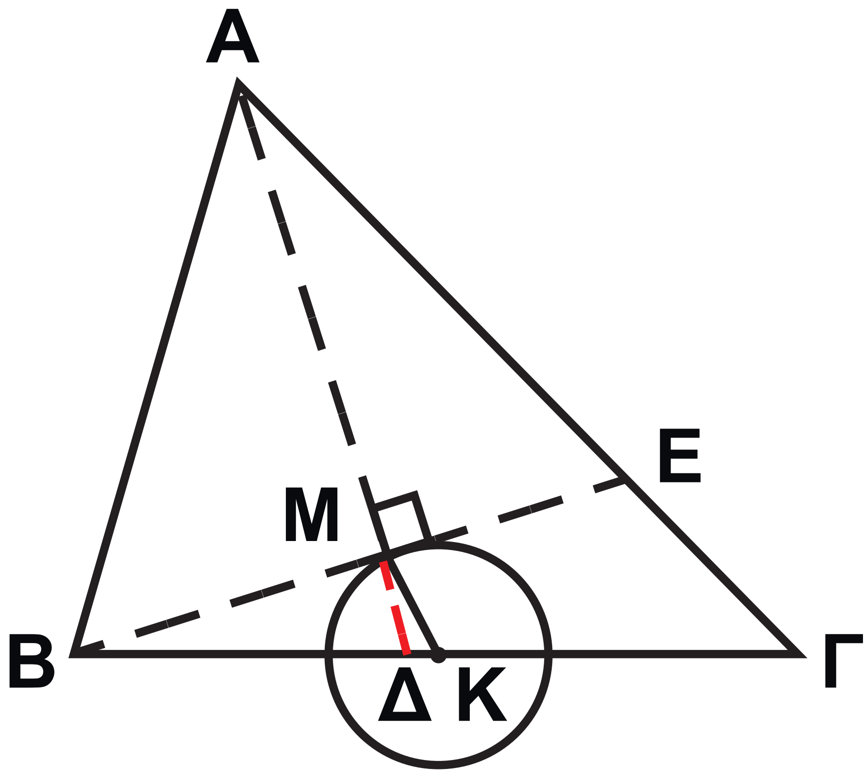
$\hat{A}_1 + \hat{A}_3 = \hat{B}_1 + \hat{B} = \Delta\hat{B}M = 90^\circ$.

Έτσι έχουμε $\Delta\hat{B}M + \Delta\hat{A}M =$
$= 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ που σημαίνει ότι το τετράπλευρο ΑΔΒΜ είναι εγγράψιμο. Όμοια προκύπτει ότι $M\hat{A}E + M\hat{\Gamma}E = 180^\circ$ που σημαίνει ότι και το ΑΜΓΕ είναι εγγράψιμο.

γ) Επειδή $M\Delta \perp AB$, $ME \perp A\Gamma$ και $\hat{A} = 90^\circ$ προκύπτει ότι το τρίγωνο $\overset{\triangle}{M\Delta E}$ είναι ορθογώνιο στο Μ και επομένως κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του είναι το μέσο Κ της πλευράς ΔΕ. Για να εφάπτεται ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $\overset{\triangle}{M\Delta E}$ στη ΒΓ αρκεί $KM \perp B\Gamma$ που ισχύει γιατί ΒΓΕΔ τραπέζιο με $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 90^\circ$ και ΜΚ//ΒΔ, ως διάμεσος του τραπεζίου.



2. Έστω $\overset{\triangle}{\text{ΑΒΓ}}$ μια θέση του τριγώνου $\overset{\triangle}{\text{ΑΒΓ}}$ με σταθερή τη ΒΓ και τη διαφορά ΑΓ − ΑΒ = δ. (ΑΓ > ΑΒ). Έστω Μ η προβολή του Β πάνω στη διχοτόμο ΑΔ και Ε η τομή της προέκτασης της ΒΜ με την ΑΓ. Στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{\text{ΑΒΕ}}$ η ΑΜ είναι ύψος και διχοτόμος, επομένως το τρίγωνο είναι ισοσκελές, δηλ.
ΑΕ = ΑΒ, οπότε ΕΓ = ΑΓ − ΑΕ =
= ΑΓ − ΑΒ = δ (1).
Παίρνουμε το μέσο Κ της ΒΓ και έχουμε: $\text{ΚΜ} = \dfrac{\text{ΕΓ}}{2} = \dfrac{δ}{2}$, λόγω της (1), οπότε το Μ βρίσκεται στον κύκλο $\left(\text{Κ}, \dfrac{δ}{2}\right)$.



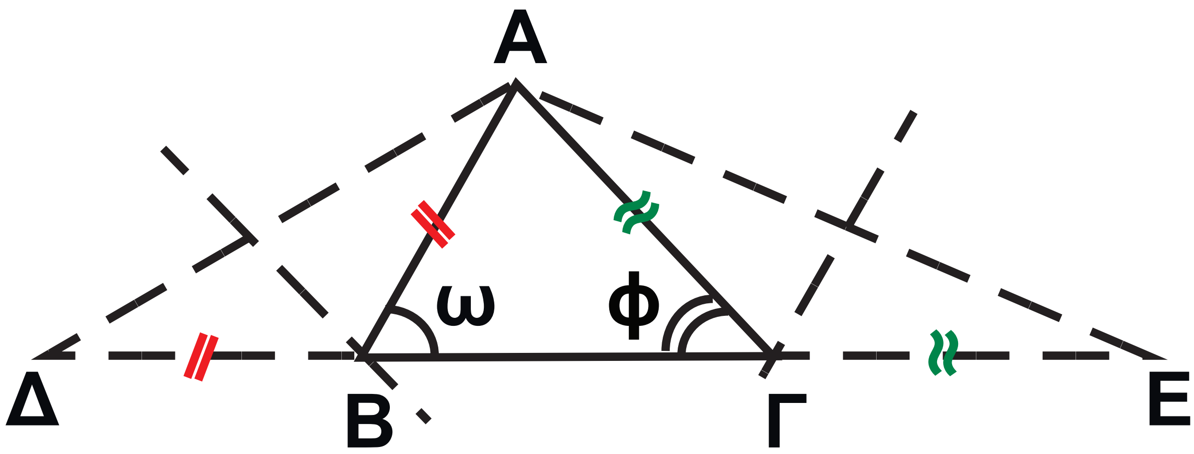
Αντίστροφα: Έστω Μ σημείο του $\left(K, \frac{\delta}{2}\right)$. Φέρνουμε τη ΒΜ και στην προέκτασή της παίρνουμε ΜΕ = ΜΒ. Από το Μ φέρνουμε κάθετο στη ΒΕ που τέμνει την προέκταση της ΓΕ στο Α. Επειδή ΑΜ μεσοκάθετος της ΒΕ θα είναι ΑΒ = ΑΕ και ΑΔ διχοτόμος της $B\hat{A}\Gamma$.

Επίσης θα είναι $ΑΓ - ΑΒ = ΑΓ - ΑΕ = ΕΓ = 2 \cdot ΜΚ = 2\frac{δ}{2} = δ$.

Το Μ επομένως είναι σημείο του τόπου. Επομένως ο ζητούμενος γεωμ. τόπος είναι ο κύκλος $\left(Κ, \frac{δ}{2}\right)$.

3. Ανάλυση: Έστω $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$ το ζητούμενο τρίγωνο με $\hat{Β} = ω$, $\hat{Γ} = φ$ και $ΑΒ + ΒΓ + ΓΑ = δ$. Προεκτείνουμε τη ΒΓ εκατέρωθεν κατά τμήματα $ΒΔ = ΑΒ$ και $ΓΕ = ΑΓ$. Τότε από τα ισοσκελή τρίγωνα $\overset{\triangle}{ΑΒΔ}$ και $\overset{\triangle}{ΑΓΕ}$ προκύπτει ότι $\hat{Δ} = \frac{ω}{2}$ και $\hat{Ε} = \frac{φ}{2}$ και $ΔΕ = δ$.

Το τρίγωνο λοιπόν $\overset{\triangle}{\text{ΑΔΕ}}$ κατασκευάζεται από ΔΕ = δ, $\hat{Δ} = \frac{ω}{2}$ και $\hat{Ε} = \frac{φ}{2}$.

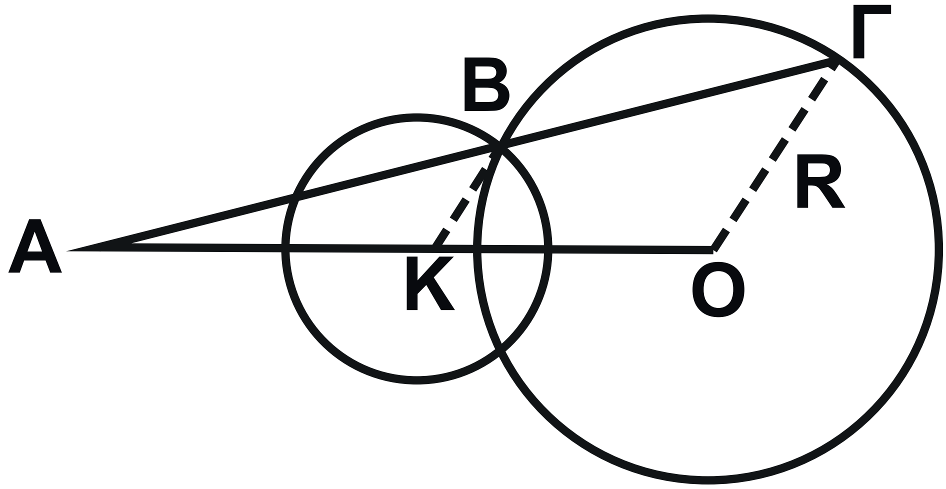


Σύνθεση: Κατασκευάζουμε το τρίγωνο $\overset{\triangle}{\text{ΑΔΕ}}$ και φέρνουμε τις μεσοκάθετες των ΑΔ και ΑΕ που τέμνουν αντίστοιχα τη ΔΕ στα Β, Γ. Το τρίγωνο $\overset{\triangle}{\text{ΑΒΓ}}$ είναι το ζητούμενο.

Απόδειξη: Επειδή Β σημείο της μεσοκαθέτου του ΑΔ θα είναι ΑΒ = ΒΔ.
Όμοια ΑΓ = ΓΕ, οπότε: ΑΒ + ΒΓ + + ΓΑ = δ και $\hat{B} = 2\hat{\Delta} = 2\frac{\omega}{2} = \omega$.
Όμοια $\hat{\Gamma} = \varphi$.

Διερεύνηση: Πρέπει $\hat{\omega} + \hat{\varphi} < 180^\circ$.

4. **Ανάλυση:** Έστω ΑΒΓ μια τέμνουσα του κύκλου ώστε Β μέσο ΑΓ. Παίρνουμε το μέσο Κ του ΑΟ. Τότε $KB = \frac{R}{2}$ και επομένως το Β ανήκει στον κύκλο $\left(K, \frac{R}{2}\right)$.



Σύνθεση: Γράφουμε τον κύκλο $\left(K, \dfrac{R}{2}\right)$ που τέμνει τον (O, R) στο B, φέρνουμε την AB και προεκτείνουμε κατά τμήμα ΒΓ = AB.

Απόδειξη: Τότε ΟΓ = 2KB = R, οπότε το Γ ανήκει στον κύκλο (O, R) και επομένως η ΑΒΓ είναι η ζητούμενη.

Διερεύνηση: Πρέπει οι κύκλοι να τέμνονται, δηλαδή R < AO < 3R.

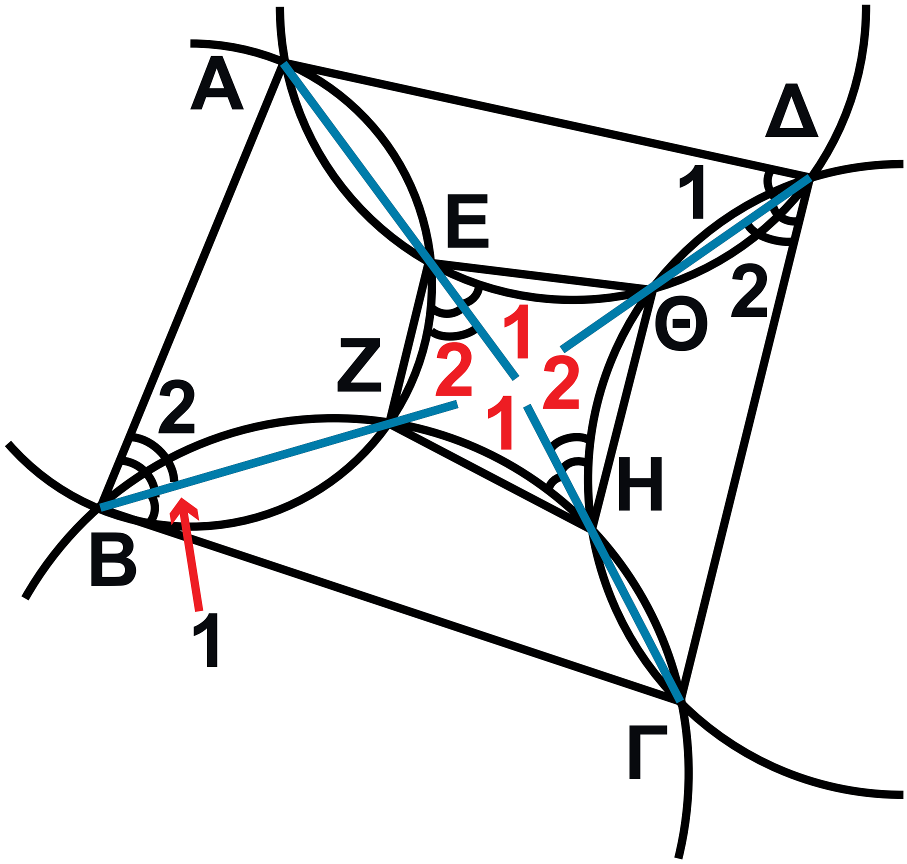
5. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\hat{E} + \hat{H} = 2L$. Επειδή το τετράπλευρο ΑΕΘΔ είναι εγγεγραμμένο θα έχουμε: $\hat{E}_1 = \hat{\Delta}_1$ (1)
Επίσης από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο AEZB έχουμε:
$\hat{E}_2 = \hat{B}_2$ (2).

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΒΓΗΖ έχουμε $\hat{H}_1 = \hat{B}_1$ (3) και από το ΓΗΘΔ ότι $\hat{H}_2 = \hat{\Delta}_2$ (4). Προσθέτοντας τις (1), (2), (3) και (4) κατά μέλη βρίσκουμε

$$\hat{E}_1 + \hat{E}_2 + \hat{H}_1 + \hat{H}_2 = \hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2 + \hat{B}_1 + $$

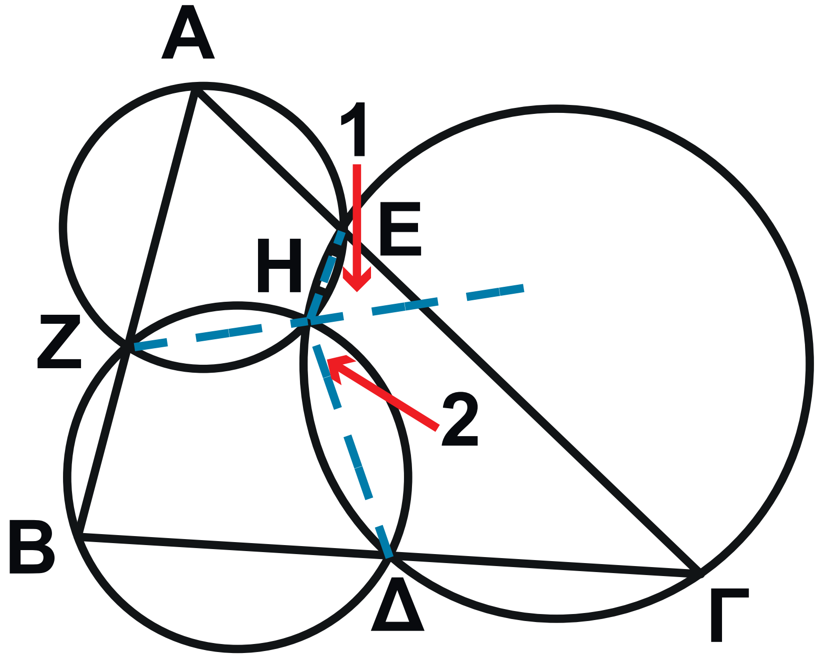
$$+ \hat{B}_2 \Leftrightarrow \hat{E} + \hat{H} = \hat{\Delta} + \hat{B} \quad (5).$$

Αλλά το ΑΒΓΔ είναι εγγράψιμο και $\hat{B} + \hat{\Delta} = 2L$, οπότε από την (5) προκύπτει ότι $\hat{E} + \hat{H} = 2L$ η οποία σημαίνει ότι το ΕΖΗΘ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.



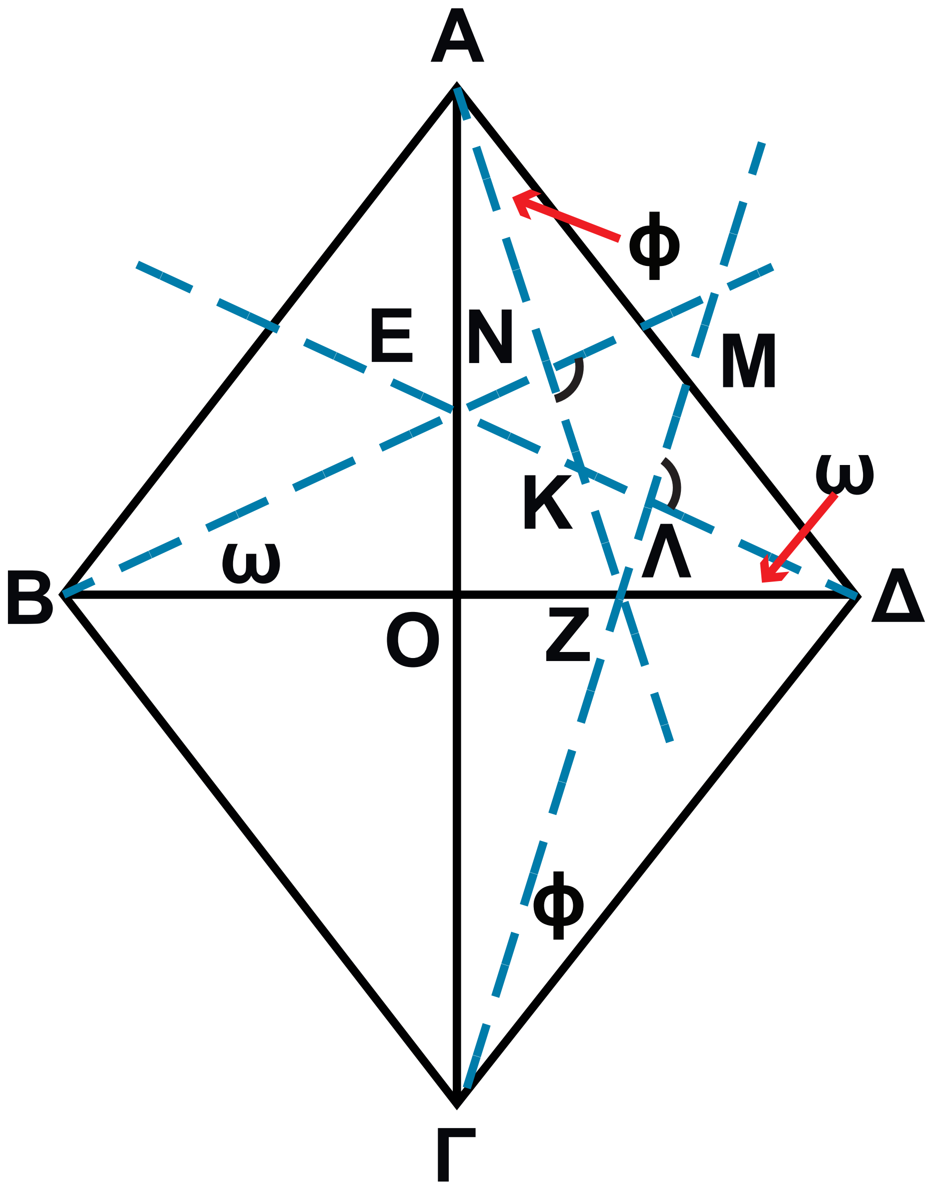
6. Έστω Η το δεύτερο κοινό σημείο των κύκλων (Α, Ζ, Ε) και (Β, Ζ, Δ). Για να διέρχεται και ο τρίτος κύκλος (Γ, Δ, Ε) από το Η, αρκεί το τετράπλευρο ΔΓΕΗ να είναι εγγράψιμο και για να συμβαίνει αυτό αρκεί $\hat{H} + \hat{\Gamma} = 2L$. Επειδή τα τετράπλευρα ΑΖΗΕ και ΒΖΗΔ είναι εγγεγραμμένα έχουμε ότι:
$\hat{H}_1 = \hat{A}$ και $\hat{H}_2 = \hat{B}$, οπότε:

$\hat{H} + \hat{\Gamma} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 + \hat{\Gamma} = \hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 2L$, αφού $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$ γωνίες του τριγώνου $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$.



7. Έστω ΚΛΜΝ το τετράπλευρο που ορίζουν οι ευθείες του προβλήματος. Για να δείξουμε ότι το ΚΛΜΝ είναι εγγράψιμο αρκεί να δείξουμε ότι $\hat{N} = \hat{\Lambda}_{\varepsilon\xi}$.
Θέτουμε $E\hat{B}\Delta = \hat{\omega}$. Επειδή ΕΟ μεσοκάθετη της ΒΔ θα είναι και $E\hat{B}\Delta = \hat{\omega}$.

**Όμοια αν θέσουμε $Z\hat{A}\Delta = \hat{\phi}$ θα εί-
ναι και $Z\hat{\Gamma}\Delta = \hat{\phi}$.
Η γωνία $\hat{N}$ είναι εξωτερική στο
τρίγωνο $\overset{\triangle}{NBZ}$, οπότε έχουμε
$\hat{N} = \hat{\omega} + B\hat{Z}N$ (1).
Αλλά και η $B\hat{Z}N$ είναι εξωτερική
στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{AZ\Delta}$,
οπότε $B\hat{Z}N = \hat{\phi} + Z\hat{\Delta}A$ (2).
Από (1), (2) έχουμε
$\hat{N} = \hat{\omega} + \hat{\phi} + Z\hat{\Delta}A$ (3).
Η $\hat{\Lambda}_{\varepsilon\xi}$ είναι εξωτερική στο τρίγω-
νο $\overset{\triangle}{\Lambda\Gamma\Delta}$, οπότε $\hat{\Lambda}_{\varepsilon\xi} = \hat{\phi} + \hat{\omega} + Z\hat{\Delta}\Gamma$ (4).
Από (3) και (4) λαμβάνοντας υπό-
ψη ότι $Z\hat{\Delta}A = Z\hat{\Delta}\Gamma$ (οι διαγώνιες
ρόμβου διχοτομούν τις γωνίες
του) προκύπτει ότι $\hat{N} = \hat{\Lambda}_{\varepsilon\xi}$, δηλα-
δή το ζητούμενο.**

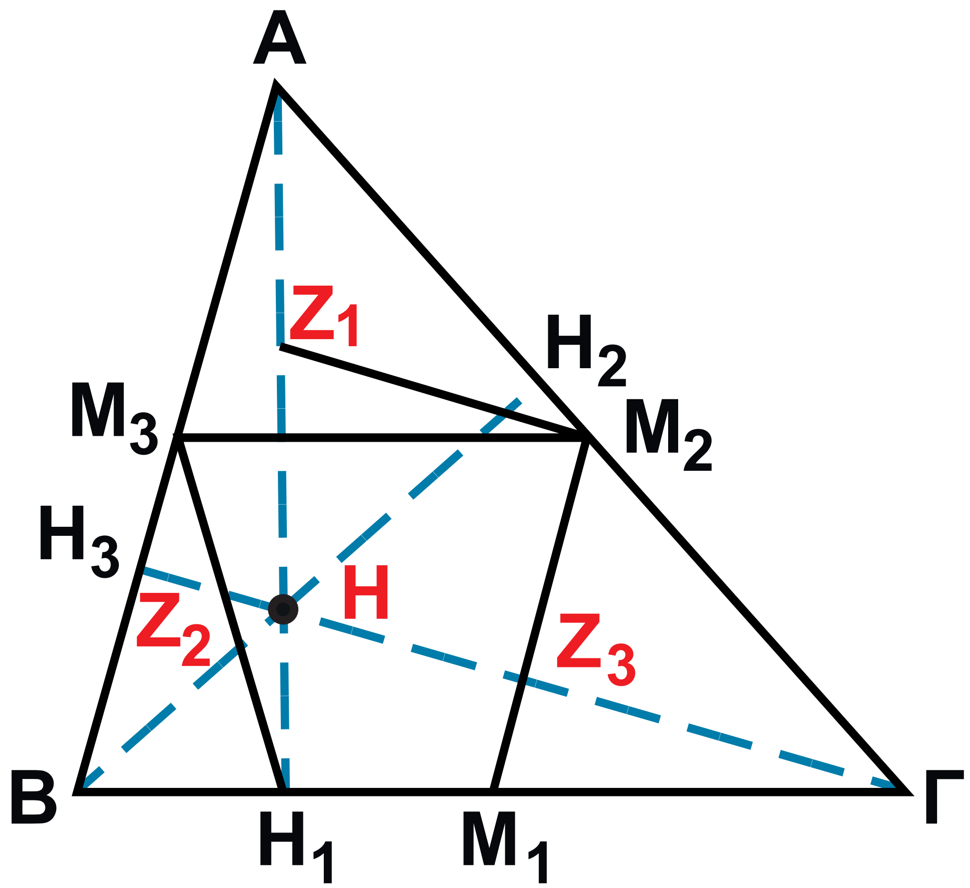


8. i) Επειδή M_2, M_3 μέσα των ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα, θα είναι M_2M_3//ΒΓ, δηλ. το $H_1M_1M_2M_3$ είναι τραπέζιο. Αλλά, επειδή πάλι M_1, M_2 μέσα των ΒΓ, ΓΑ, θα είναι

$M_1M_2 = \dfrac{AB}{2}$ (1). Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\overset{\triangle}{H_1}B$ το H_1M_3 είναι διάμεσος, άρα $H_1M_3 = \dfrac{AB}{2}$ (2).

Από (1), (2) προκύπτει ότι:

$M_1M_2 = H_1M_3$ το οποίο σημαίνει ότι το $H_1M_1M_2M_3$ είναι ισοσκελές τραπέζιο και επομένως (εφαρμογή 2) είναι εγγράψιμο.



ii) Στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{ΑΗΓ}$ είναι Z_1 μέσο ΑΗ και M_2 μέσο ΑΓ, οπότε Z_1M_2//ΓΗ. Αλλά και M_2M_1//ΑΒ. Απ' αυτές και επειδή ΓΗ $\perp$ ΑΒ προκύπτει $Z_1M_2 \perp M_2M_1$, οπότε στο τετράπλευρο $Z_1H_1M_1M_2$ έχουμε $\hat{H}_1 + \hat{M}_2 = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ το οποίο σημαίνει ότι το $Z_1H_1M_1M_2$ είναι εγγράψιμο.

iii) Από το i) προκύπτει ότι το H_1 είναι σημείο του κύκλου (M_1, M_2, M_3). Όμοια και τα H_2, H_3 είναι σημεία του ίδιου κύκλου. Από το ii) συμπεραίνουμε ότι το Z_1 είναι σημείο του κύκλου (H_1, M_1, M_2) ο οποίος σύμφωνα με το i) ταυτίζεται με τον (M_1, M_2, M_3), άρα το Z_1 είναι σημείο του κύκλου

(M_1, M_2, M_3). Όμοια και τα Z_2, Z_3 είναι σημεία του ίδιου κύκλου.

Άρα τα σημεία M_i, H_i, Z_i, $i = 1, 2, 3$ είναι σημεία ομοκυκλικά.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ